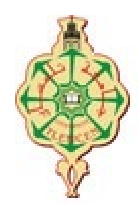
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen



Faculté de Technologie

Département des Sciences et Techniques

Outils mathématiques (Math 3)

Rappels de cours et exercices corrigés sur les suites numériques, séries numériques, séries de fonctions, séries entières et séries de Fourier.

ZAHAF Mohammed Brahim **BENSID Sabri**

Outils mathématiques.
Séries numériques, séries entières et séries de Fourier.
Cours et exercices avec solutions.

ZAHAF Mohammed Brahim BENSID Sabri

21 juin 2014

Préface

Ce livre est un recueil d'exercices et de problèmes des mathématiques pour l'ingénieur. Il s'adresse aux étudiants de deuxième année de Licence des sciences et techniques, premier semestre(L2S1), ainsi qu'aux étudiants des autres filières et des écoles préparatoires qui y trouveront autant les théorèmes qu'ils doivent connaître que des exercices pour les illustrer. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques pour l'ingénieur dispensé au département sciences et techniques, faculté de technologie à l'université de Tlemcen.

Nous avons privilégier l'exposé des méthodes de calcul (théorèmes, propositions,..) sans démontrer quoi que ce soit pour aller directement vers le but et ceci en ajoutant des exercices avec des solutions détaillées et quelques exercices supplémentaires donnés sans solutions pour examiner les capacités des lecteurs. Nous les invitons cependant à chercher eux même les exercices avant de regarder les solutions. Nous mentionnons aussi que le cours de ce livre est un résumé fait à partir de la bibliographie insérer à la fin de ce livre.

Le premier chapitre rappelle et présente des résultats sur les suites numériques qui sont très important pour les chapitres suivants. Le second chapitre aborde les séries numériques à termes positifs et à termes quelconques. Le troisième chapitre est consacré aux séries de fonctions avec notamment les différentes notions de convergences. Le chapitre quatre se concentre sur les séries entières et leurs applications aux équations différentielles et le chapitre cinq traite les séries de Fourier qui sont un outil très important pour les ingénieurs.

Nous avons ajouté aussi les examens des années passées depuis 2008 avec leurs solutions sous forme d'un chapitre et une annexe historique résumant une brève biographie des mathématiciens cités dans ce livre.

Table des matières

Préface **i**

1 Suites numériques **1**
1.1 Suites numériques, convergence 1
1.2 Exercices 4
1.3 Exercices supplémentaires : 14

2 Séries numériques **17**
2.1 Définitions et propriétés 17
2.2 Condition nécéssaire de convergence 18
2.3 Critère de Cauchy pour les séries 19
2.4 Suites et séries 20
2.5 Séries à termes positifs 21
2.6 Séries à termes quelconques 25
2.6.1 Séries absolument convergentes 25
2.6.2 Séries alternées 26
2.7 Multiplication des séries 27
2.8 Exercices 28
2.8.1 Séries à termes positifs 28
2.8.2 Séries numériques à termes quelconques 36
2.9 Exercices supplémentaires 40

3 Séries de fonctions **45**
3.1 Convergence simple et convergence uniforme 45
3.2 Propriété des séries uniformément convergentes 47
3.3 Exercices 49
3.4 Exercices supplémentaires 52

4 Séries entières **55**
4.1 Définitions et propriétés 55
4.2 Rayon de convergence 56
4.2.1 Détermination du rayon de convergence 56
4.3 Propriétés des séries entières 57
4.4 Développement en séries entières 59

4.4.1 Applications 61
4.5 Exercices 64
4.6 Exercices supplémentaires 77

5 Séries de Fourier 79
5.1 Définitions 79
5.2 Fonctions périodiques 80
5.3 Convergence d'une série trigonométrique 80
5.4 Relations entre les coefficients et la somme d'une série trigonométrique 81
5.5 Série de Fourier 82
5.6 Egalité de Parseval 84
5.7 Résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires 84
5.7.1 Équation des cordes vibrantes 84
5.8 Exercices 86
5.9 Exercices supplémentaires 89

6 Examens 93
6.1 Examen 2008 93
6.2 Examen de rattrapage 2008 97
6.3 Examen de rattrapage 2009 101
6.4 Examen 2010 104
6.5 Examen de rattrapage 2010 108
6.6 Examen 2011 112
6.7 Examen de rattrapage 2011 116
6.8 Examen 2012 119
6.9 Examen de rattrapage 2012 122
6.10 Examen 2013 125
6.11 Examen de rattrapage 2013 129
6.12 Examen 2014 132
6.13 Examen de rattrapage 2014 137
6.14 Examen GBM 2012 140

7 Annexe historique 143

Chapitre 1

Suites numériques

Sommaire

1.1 Suites numériques, convergence 1
1.2 Exercices 4
1.3 Exercices supplémentaires : 14

1.1 Suites numériques, convergence

Définition 1.1. *On appelle suite d'élements de* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une fonction*

$$u \quad : \quad \mathbb{N} \to \mathbb{K}$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

On note par $(u_n)_n$.

Définition 1.2. *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{R}$ *est croissante (resp. décroissante) si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ *(resp.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$*).*

Définition 1.3. *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{R}$ *est majorée (resp. minorée) s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *(resp. s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$*).*

Définition 1.4. *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$ *est convergente vers* $l \in \mathbb{K}$ *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N(\varepsilon), \text{ on a } |u_n - l| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1. *Toute suite convergente est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel positif* M *tel que* $|u_n| \leq M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.2. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites d'éléments de* $\mathbb{K}$. *On suppose que* $(u_n)_n$ *converge vers* l_1 *et* $(v_n)_n$ *converge vers* l_2. *Alors :*
1. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, *la suite* $(\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n)_n$ *converge vers* $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$;
2. La suite $(u_n v_n)_n$ *converge vers* $l_1 l_2$;
3. Si $l_2 \neq 0$, *la suite* $\left(w_n = \frac{u_n}{v_n}\right)_n$ *est définie à partir de certain rang, et converge vers* $\frac{l_1}{l_2}$.

Proposition 1.3. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites d'éléments de* $\mathbb{R}$. *On suppose que* $(u_n)_n$ *converge vers* l_1 *et* $(v_n)_n$ *converge vers* l_2. *Alors*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ u_n \leq v_n \Rightarrow l_1 \leq l_2.$$

Proposition 1.4. *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *et* $(w_n)_n$ *trois suites d'éléments de* $\mathbb{R}$. *Si* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *convergent vers* l, *et si*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N,\ u_n \leq w_n \leq v_n.$$

Alors la suite $(w_n)_n$ *converge vers* l.

Proposition 1.5. *1. Toute suite croissante majorée est convergente.*
2. Toute suite décroissante minorée est convergente.

Exemple 1.1. *Soit* $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$. $(u_n)_n$*est évidemment croissante. On prouve par récurrence que* $(n+1)! > 2^n$ *pour* $n \geq 1$. *Donc la suite est majorée par*

$$u_n \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2\left[1 - \frac{1}{2^n}\right] < 3$$

Etant croissante majorée, elle converge.

Définition 1.5. *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{R}$ *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) si* $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N$ *entraine* $u_n \geq A$. *(resp.* $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ *entraine* $u_n \leq B$*).*

Proposition 1.6. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}$. *On suppose qu'elle est croissante. Alors on a soit a) soit b) :*
a) $(u_n)_n$ *est majorée, et tend vers* $l \in \mathbb{R}$.
b) $(u_n)_n$ *n'est pas majorée, et alors tend vers* $+\infty$.

On a un énoncé analogue pour les suites décroissantes.

Définition 1.6. *On appelle suites adjacentes deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{R}$ *telles que*
i) $(u_n)_n$ *est croissante.*
ii) $(v_n)_n$ *est décroissante.*
iii) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Proposition 1.7. *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites adjacentes. Alors ces deux suites convergent et admettent la même limite.*

Exemple 1.2. *Soient*

$$\begin{aligned} u_n &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!} \\ v_n &= u_n+\frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

ces deux suites sont adjacentes. En effet,
i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est évidemment croissante*
ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante. En effet,*

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1-n}{(n+1)!}\leq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

iii)

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0.$$

Définition 1.7. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{K}$*. On dit que* $(u_n)_n$ *une suite de Cauchy, si on a la propriété suivante :*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ \ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n>m\geq N(\varepsilon)\,,\ \text{on a}\ |u_n-u_m|<\varepsilon.$$

Exemple 1.3. *Soit* $u_n=\cos\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$*. Alors* $(u_n)_n$ *est de Cauchy. En effet, on a pour* $n\geq m$ *:*

$$\begin{aligned} |u_n-u_m| &= \left|\cos\frac{1}{n}-\cos\frac{1}{m}\right|=\left|-2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right| \\ &\leq 2\left|\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{n}+\frac{1}{m}\leq\frac{2}{m} \end{aligned}$$

(car on a $|\sin x|\leq 1$ *et* $|\sin x|\leq|x|\,,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$*).*
Soit $\varepsilon>0$

$$|u_n-u_m|\leq\frac{2}{m}<\varepsilon\Rightarrow m\geq\frac{2}{\varepsilon}$$

Si l'on choisit $N(\varepsilon)=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$*, on aura alors* $\forall n,m\in\mathbb{N}$*,* $n>m\geq N(\varepsilon)$*,* $|u_n-u_m|<\varepsilon$*, d'où le résultat.*

Proposition 1.8. *Une suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$ *est convergente, si et seulement si elle est de Cauchy.*

Exemple 1.4. *Soit* $u_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ *pour* $n\geq 1$*. On a*

$$u_{2n}-u_n=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

Il résulte que $(u_n)_n$ *n'est pas de Cauchy. Elle diverge donc. Comme elle est de plus croissante, on en déduit qu'elle tend vers* $+\infty$*.*

Définition 1.8. *On appelle sous-suite ou suite extraite d'une suite $(u_n)_n$ une suite que nous noterons $\left(u_{\Phi(n)}\right)_n$ où Φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$. ($\Phi(n)$ représente une suite strictement croissante d'indice). Par exemple, si $\Phi(n) = 2n$, la suite extraite est celle des termes d'indices pairs. Si $\Phi(n) = 2n+1$, la suite extraite est celle des termes d'indices impairs.*

On remarque facilement que, si une suite converge, alors toute sous-suite converge vers la même limite.

On se sert généralement de la contraposée pour montrer qu'une suite ne converge pas. On extrait deux sous-suites convergeant vers des limites différentes. Par exemple $u_n = (-1)^n$.

Proposition 1.9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

1.2 Exercices

Exercice 1.1. En utilisant la définition de la convergence d'une suite vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3.$$

Solution

1. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{3n}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{3}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon} + 2\right).$$

Donc si on choisit $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\varepsilon} + 2\right)\right] + 1$ on aura alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$, $\left|\frac{3n}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 1.$$

Donc si on choisit $N(\varepsilon) = \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$ on aura alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$, $\left|\frac{3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$.

Exercice 1.2. Déterminer (quand elle existe) la limite, quand $n \to +\infty$, des suites numériqurs suivantes :

$$(1)\ U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad (2)\ U_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
$$(3)\ U_n = \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}, \qquad (4)\ U_n = \frac{2n^3 + n^2 + 1}{-n^3 + n + 1},$$
$$(5)\ U_n = \frac{\sin(n)}{n^2 + 1}, \qquad (6)\ U_n = \frac{2n + 1 - \cos n\pi}{n}.$$

Solution

1. $$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{1}{n}\right)} = e.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(\sqrt{n})}{2\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 0$, car $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + n^2 + 1}{-n^3 + n + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{-n^3} \frac{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^3}}{1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = -2.$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2 + 1} = 0$, car $\sin(n)$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0.$

6. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n\pi}{n} = 0$ car $\cos(n\pi)$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n + 1 - \cos n\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{\cos n\pi}{n}\right) = 2,$$

Exercice 1.3. Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{3U_n + 2} \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

1. Montrer que $\forall n \geq 0$, $U_n > 0$.
2. Vérifier que l'équation $x = \frac{x+2}{3x+2}$ n'admet qu'une solution positive a.
3. Montrer que $\forall n \geq 0$, $|U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$. En déduire la limite de la suite (U_n).

Solution

1. Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que $U_n > 0$.

Pour $n = 0$, on a $U_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Supposons que $U_n > 0$,
$\Rightarrow \frac{U_n+2}{3U_n+2} > 0$ i.e. $U_{n+1} > 0$.

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Donc $\forall n \geq 0$ on a $U_n > 0$.

2. Vérifions que l'equation $x = \frac{x+2}{3x+2}$ n'admet qu'une solution positive a.
$x = \frac{x+2}{3x+2} \iff 3x^2 + x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$ ou $x = -1$ alors $a = \frac{2}{3}$.

3. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0$, $|U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$.
Pour $n = 0$, on a $|U_0 - a| = \left|1 - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2^0}$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Supposons que $|U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$,

$$|U_{n+1} - a| = \left|\frac{U_n + 2}{3U_n + 2} - \frac{2}{3}\right| = \frac{\left|U_n - \frac{2}{3}\right|}{3U_n + 2} \leq \frac{\left|U_n - \frac{2}{3}\right|}{2} \leq \frac{\frac{1}{2^n}}{2} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Donc $\forall n \geq 0$ on a $|U_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$.

Exercice 1.4. Soit (U_n) la suite définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{U_n+1} \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 3$.
2. Vérifier que (U_n) est monotone.
3. En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

1. i) Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que $U_n > 0$.
Pour $n = 0$, on a $U_0 = 1 > 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Supposons que $U_n > 0$,
$\Rightarrow \frac{4U_n}{U_n+1} > 0$ i.e. $U_{n+1} > 0$
Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Donc $\forall n \geq 0$ on a $U_n > 0$.
1. ii) Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geq 0$ que $U_n < 3$.
Pour $n = 0$, on a $U_0 = 1 < 3$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Supposons que $U_n < 3$,
$\Rightarrow U_{n+1} - 3 = \frac{4U_n}{U_n+1} - 3 = \frac{U_n-3}{U_n+1} < 0$ i.e. $U_{n+1} < 3$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.
Donc $\forall n \geq 0$ on a $U_n < 3$. Conclusion : $\forall n \geq 0$ on a $0 < U_n < 3$.

2. Vérifions que (U_n) est monotone.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n}{U_n+1} - U_n = \frac{4U_n - U_n^2 - U_n}{U_n+1} = \frac{3U_n - U_n^2}{U_n+1} = \frac{U_n(3-U_n)}{U_n+1} > 0,$$

car $\forall n \geq 0$ on a $0 < U_n < 3$, ainsi la suite est croissante.

3. En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.
(U_n) est croissante et majorée donc convergente, posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ alors $l = \frac{4l}{l+1}$ ainsi $l = 3$.

Exercice 1.5. Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1}$.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq U_n \leq 2$.
2. Montrer que (U_n) est croissante.
3. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1. Démontrons par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que $0 < U_n \leq 2$.
Pour $n = 0$, on a $0 < U_0 = 1 < 2$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Supposons que $0 < U_n < 2$,
$\Rightarrow 0 < U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1} < \sqrt{2+1} < 2$ i.e. $0 < U_{n+1} < 2$
Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.
Donc $\forall n \geq 0$ on a $0 < U_n < 2$.

2. Montrons que (U_n) est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n+1} - \sqrt{U_{n-1}+1} = \frac{U_n - U_{n-1}}{\sqrt{U_n+1} + \sqrt{U_{n-1}+1}}$$

$$= \frac{U_1 - U_0}{(\sqrt{U_n+1} + \sqrt{U_{n-1}+1})(\sqrt{U_{n-1}+1} + \sqrt{U_{n-2}+1}) \dots \sqrt{U_1+1} + \sqrt{U_0+1})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{U_n+1} + \sqrt{U_{n-1}+1})(\sqrt{U_{n-1}+1} + \sqrt{U_{n-2}+1}) \dots \sqrt{U_1+1} + \sqrt{U_0+1})} > 0$$

Ainsi (U_n) est croissante.

3. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
(U_n) est croissante et majorée donc convergente, posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ alors $l = \sqrt{l+1}$ ainsi $l = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Exercice 1.6. Soit (U_n) la suite définie par U_0 donné ($|U_0| \leq 1$) et la relation récurrente

$$U_{n+1} = \frac{1 + U_n^2}{2}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < U_n \leq 1$.
2. Déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

Soit (U_n) la suite définie par U_0 donné ($|U_0| \leq 1$) et la relation récurrente

$$U_{n+1} = \frac{1 + U_n^2}{2}.$$

1. Démontrons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ que $0 < U_n \leq 1$.

Pour $n = 1$, on a $|U_0| \leq 1 \Rightarrow 0 < 1 \leq 1 + U_0^2 \leq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1+U_0^2}{2} \leq 1$ i.e. $0 < U_1 \leq 1$ donc la propriété est vraie au rang 1.

Supposons que $0 < U_n \leq 1$,
$\Rightarrow 0 < 1 \leq 1 + U_n^2 \leq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1+U_n^2}{2} \leq 1$
i.e. $0 < U_{n+1} \leq 1$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n + 1$.
Donc $\forall n \geq 1$ on a $0 < U_n \leq 1$.

2. Déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
Étudions le sens de variation de la suite (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1 + U_n^2}{2} - U_n = \frac{1 + U_n^2 - 2U_n}{2} = \frac{(1 - U_n)^2}{2} \geq 0.$$

La suite est donc croissante, de plus elle est majorée (par 1) ce qui implique que (U_n) est convergente.
Posons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + U_n^2}{2}$$

on obtient $l = \frac{1+l^2}{2} \Rightarrow l = 1$ (puisque la fonction $x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$ est continue).

Exercice 1.7. Soient (U_n) et (V_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq U_n < 1 \ \text{ et } \ 0 \leq V_n < 1$$
$$\text{et } \lim_{n \to +\infty} (U_n V_n) = 1.$$

Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et que

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = 1.$$

Solution

Puisque $0 \leq U_n < 1$ et $0 \leq V_n < 1$ alors $0 \leq U_nV_n < U_n < 1$ et $0 \leq U_nV_n < V_n < 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_nV_n) = 1$ alors d'après le principe des gendarmes on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 1$.

Exercice 1.8. I. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
II. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel α est l'unique entier, noté $[\alpha]$, vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$. Etablir que $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$U_n = \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2}.$$

1. Montrer que l'on a l'encadrement

$$\frac{\pi(n+1)-2}{2n} < U_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}.$$

2. Déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

I. **Montrons par récurrence que** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Pour $n=1$, on a $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, donc la propriété est vraie au rang 1.
Supposons que $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, alors

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

II. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel α est l'unique entier, noté $[\alpha]$, vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$. **Établir que $\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$.**

On a $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1 \Rightarrow [\alpha]-1 \leq \alpha - 1 < [\alpha]$, ce qui donne

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha. \tag{1.1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$U_n = \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2}.$$

1. Montrer que l'on a l'encadrement $\frac{\pi(n+1)-2}{2n} < U_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$.

En vertu de l'encadrement (1.1) on obtient

$$\frac{(\pi-1)+(2\pi-1)+...+(n\pi-1)}{n^2} < \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2} \leq \frac{\pi+2\pi+...+n\pi}{n^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(1+2+...+n)-n}{n^2} < \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2} \leq \frac{\pi(1+2+...+n)}{n^2}.$$

En utilisant la première partie de cet exercice on trouve

$$\frac{\pi(\frac{n(n+1)}{2})-n}{n^2} < \frac{[\pi]+[2\pi]+...+[n\pi]}{n^2} \leq \frac{\pi(\frac{n(n+1)}{2})}{n^2}.$$

ce qui mène à

$$\frac{\pi(n+1)-2}{2n} < U_n \leq \frac{\pi(n+1)}{2n}$$

2. Déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

La suite (U_n) est encadrée par deux suites convergentes vers une même limite donc d'après le théorème des gendarmes la suite (U_n) est convergente :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n+1)-2}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi(n+1)}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1.9. Soient (U_n) et (V_n) deux suites définie par $U_0 > V_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2}, \qquad V_{n+1} = \sqrt{U_nV_n}.$$

a) Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $U_n \geq 0$, $V_n \geq 0$ et $U_n \geq V_n$.
b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante minorée et la suite (V_n) est croissante majorée.
c) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.
d) Montrer que la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - V_n$ a pour limite 0. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite.

Solution

a. i. Montrons que $\forall n \geq 0$, on a $U_n \geq 0$, $V_n \geq 0$.

Pour $n = 0$, on a par hypothèse $U_0 > 0$, $V_0 > 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$, alors

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} > 0 \qquad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} > 0.$$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

a. ii. Montrons que $\forall n \geq 0$, on a $U_n \geq V_n$.

Remarquons que $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ ceci implique que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. Ainsi,
si $a = \sqrt{U_n}$ et $b = \sqrt{V_n}$, on a :

$$V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \leq U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

b. Montrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée et la suite (V_n) est croissante et majorée.

Puisque $U_n \geq V_n$ alors

$$U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{U_n + U_n}{2} \leq U_n,$$

ainsi (U_n) est décroissante et

$$V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n} \geq \sqrt{V_n V_n} \geq V_n,$$

donc (V_n) est croissante, de plus on a

$$U_0 \geq \ldots \geq U_{n-1} \geq U_n \geq V_n \geq V_{n-1} \geq \ldots \geq V_0,$$

donc $V_n \leq U_0$ et $U_n \geq V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c. Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.

(U_n) est décroissante et minorée et la suite (V_n) est croissante et majorée donc elles convergent.

d. Montrer que la suite (W_n) définie par $W_n = U_n - V_n$ a pour limite 0.

On a $W_n = U_n - V_n \geq 0$ et

$$W_{n+1} = U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} - V_{n+1} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - V_n \leq \frac{U_n - V_n}{2} \leq \frac{W_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui implique que $0 \leq W_n \leq \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite.

Posons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ et $l' = \lim\limits_{n \to +\infty} V_n$, alors

$$0 = \lim_{n \to +\infty} W_n = \lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty} U_n - \lim_{n \to +\infty} V_n = l - l' \Rightarrow l = l'.$$

Exercice 1.10. Soient $k \in]0,1[$, et la suite (U_n) qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+2} - U_{n+1}| \leq k\,|U_{n+1} - U_n|\,.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - U_n| \leq k^n\,|U_1 - U_0|\,.$$

2. Montre que si p et q deux entiers tels que $p > q \geq 0$, alors

$$|U_p - U_q| \leq \frac{k^q}{1-k}\,|U_1 - U_0|\,.$$

3. Déduire que la suite (U_n) est de Cauchy, et par suite convergente.

Solution

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |U_{n+1} - U_n| \leq k^n\,|U_1 - U_0|\,.$

Pour $n = 0$, on a $|U_1 - U_0| \leq k^0\,|U_1 - U_0|$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons que $|U_{n+1} - U_n| \leq k^n\,|U_1 - U_0|$, alors

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq k\,|U_{n+1} - U_n| \leq kk^n\,|U_1 - U_0| \leq k^{n+1}\,|U_1 - U_0|$$

Ainsi, si la propriété est vraie au rang n alors elle est vraie au rang $n+1$.

2. Montre que si p et q deux entiers tels que $p > q \geq 0$, alors $|U_p - U_q| \leq \frac{k^q}{1-k}\,|U_1 - U_0|\,.$

Soit $0 < k < 1$, $p > q \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
|U_p - U_q| &= |U_p - U_{p-1} + U_{p-1} - U_{p-2} + U_{p-2} - \ldots + U_{q+1} - U_q| \\
&\leq |U_p - U_{p-1}| + |U_{p-1} - U_{p-2}| + \ldots + |U_{q+1} - U_q| \\
&\leq k^{p-1}\,|U_1 - U_0| + k^{p-2}\,|U_1 - U_0| \ldots + k^q\,|U_1 - U_0| \\
&\leq \left(k^{p-1} + k^{p-2} + \ldots + k^q\right)|U_1 - U_0| \\
&\leq k^q\left(1 + k + k^2 + \ldots + k^{p-q-1}\right)|U_1 - U_0| \\
&\leq k^q\,\frac{1 - k^{p-q}}{1-k}\,|U_1 - U_0| \\
&\leq \frac{k^q}{1-k}\,|U_1 - U_0|\,.
\end{aligned}$$

3. Déduire que la suite (U_n) est de Cauchy, et par suite convergente.

Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &\leq \frac{k^q}{1-k}|U_1 - U_0| < \varepsilon \\ &\Rightarrow k^q < \frac{\varepsilon(1-k)}{|U_1 - U_0|} \\ &\Rightarrow q\ln(k) < \ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|U_1 - U_0|}\right) \\ &\Rightarrow q > \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|U_1-U_0|}\right)}{\ln(k)}. \end{aligned}$$

Si l'on choisit $N(\varepsilon) = \left[\left|\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|U_1-U_0|}\right)}{\ln(k)}\right|\right] + 1$, on aura alors $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $p > q \geq N(\varepsilon)$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$, d'où (U_n) est de Cauchy donc convergente.

Exercice 1.11. Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite (U_n) est monotone.
2. Montrer que si k et n sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ alors $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq 1$, et conclure que (U_n) est convergente.

Solution

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$U_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite (U_n) est monotone.

$U_{n+1} - U_n = (\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}) - (\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n})$
$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$,

ainsi (U_n) est croissante.

2. Montrer que si k et n sont deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ alors $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$.

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow n+1 \leq n+k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq 1$, et conclure que (U_n) est convergente.

On a d'après la question 2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{n+2} &\leq \frac{1}{n+1}\\ &\vdots\\ \frac{1}{n+n} &\leq \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

En sommant ces inégalités membre à membre on obtient

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}}_{n\ fois}$$

ce qui implique que $U_n \leq n\frac{1}{n+1} < 1$.

Conclusion : La suite (U_n) est croissante et majorée donc convergente.

1.3 Exercices supplémentaires :

Exercice 1.12. Soit (U_n) la suite définie par

$$U_n = \sqrt{(n+a)(n+b)} - n, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \ a > 0,\ b > 0.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 < U_n < \frac{a+b}{2}$.

2. Déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice 1.13. Soit (U_n) la suite définie par

$$u_n = \frac{5 \times 7 \times 9 \times \ldots \times (5+2n)}{4 \times 7 \times 10 \times \ldots \times (4+3n)}.$$

1. Calculer $U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3$.

2. Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) converge vers une limite l.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7+2n}{7+3n}$, en déduire que $l = \frac{2}{3}l$.

4. Déduire la limite de (U_n).

Exercice 1.14. Étudier la suite (U_n) définie par $U_1 > 0$ donné et la relation récurrente

$$U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a^2}{U_{n-1}}\right),\ \ n \geq 2, \quad a > 0\ (\text{donné}).$$

Exercice 1.15. On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies par

$$U_0 = 1, \quad V_0 = 2,$$
$$U_n = \frac{2U_{n-1}V_{n-1}}{U_{n-1} + V_{n-1}}, \qquad V_n = \tfrac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}.$$

1. Montrer que $[\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $V_n > 0]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculer $V_n - U_n$ en fonction de U_{n-1} et V_{n-1}.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n > 0$.
4. Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
5. Déduire de 3. et 4. que $[\forall n \in \mathbb{N}, U_n < V_0$ et $V_n > U_0]$.
6. En déduire que (U_n) et (V_n) sont convergentes.

Exercice 1.16. Soit (U_n) la suite définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{3n^2-2}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

(U_n) est-elle bornée ? est-elle convergente ?

Exercice 1.17. Soit (U_n) la suite de terme général

$$U_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. Montrer que les deux sous-suites (U_{2n+1}) et (U_{2n}) de (U_n) sont adjacentes.
2. Que peut-on conclure pour (U_n) ?

Exercice 1.18. [Théorème de Césaro]
Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; V_n = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n}.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = l.$$

La réciproque est-elle vraie ?

Chapitre 2

Séries numériques

Sommaire

2.1 Définitions et propriétés **17**

2.2 Condition nécéssaire de convergence **18**

2.3 Critère de Cauchy pour les séries **19**

2.4 Suites et séries **20**

2.5 Séries à termes positifs **21**

2.6 Séries à termes quelconques **25**

2.6.1 Séries absolument convergentes 25

2.6.2 Séries alternées 26

2.7 Multiplication des séries **27**

2.8 Exercices **28**

2.8.1 Séries à termes positifs 28

2.8.2 Séries numériques à termes quelconques 36

2.9 Exercices supplémentaires **40**

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1. *Soit* $(u_0, u_1, ..., u_n, ...)$ *une suite de nombres rèels où complexes. Formons les sommes*

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ S_1 &= u_0 + u_1 \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &\ldots \\ S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n \text{ (somme partielle d'ordre } n \text{)} \end{aligned}$$

Si (S_n) *a une limite* S, *finie ou non, quand* n *tend vers* $+\infty$, *on dit que la série* $u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$ *(ou la série de terme général* u_n*) a pour somme* S, *et l'on écrit*

$$S = u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$$

ou

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Si de plus S *est finie, la série est dite convergente. Une série non convergente est dite divergente.*

Exemple 2.1. *Considérons la série*

$$1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$$

c'est une progression géométrique de premier terme 1 *et de raison* q, $(q \neq 0)$. *La somme des* n *premiers termes (lorsque* $q \neq 1$*) est égale à*

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

1. Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$ *lorsque* $n \to +\infty$ *et, par conséquant,*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$$

Ainsi lorsque $|q| < 1$, *la série converge et sa somme est*

$$S = \frac{1}{1 - q}$$

2. Si $|q| > 1$, $q^n \to \infty$ *lorsque* $n \to +\infty$ *et* $\frac{1-q^n}{1-q} \to \infty$. *Ainsi lorsque* $|q| > 1$, *la série diverge.*

3. Si $q = 1$, *la série s'écrit*

$$S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$$

par conséquant

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

la série diverge.

4. Si $q = -1$, la série s'écrit

$$S_n = \begin{cases} 0 & si\ n\ \ est\, pair \\ 1 & si\ n\ \ est\, impair \end{cases}$$

$(S_n)_n$ n'a pas de limite, la série diverge.

Définition 2.2. *La série $\sum\limits_{n=m+1}^{+\infty} u_n$ est appelée reste d'ordre m de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.*

Théorème 2.1. *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et si sa somme est S, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n$, où λ est un nombre fixé, converge aussi est sa somme est λS.*

Théorème 2.2. *Si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ convergent et ont pour sommes S et S', les séries*

$$\sum_{n\geq 0} (u_n \pm v_n)$$

convergent également et pour sommes $S \pm S'$.

2.2 Condition nécéssaire de convergence

Théorème 2.3. *Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge, son terme général u_n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Preuve. Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Si la série est convergente de somme S, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Exemple 2.2. *La série*

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{n}{n+1} + ...$$

diverge, car

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0.$$

Théorème 2.4. **a)** $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \forall k$, $\sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente.*

b) $\exists k$, $\sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

c) $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente* $\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{\infty} u_n = 0.$

Corollaire 2.1. *La nature d'une série ne change pas si l'on modifie un nombre fini de ses termes.*

2.3 Critère de Cauchy pour les séries

Théorème 2.5. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série. Pour que la série soit convergente, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifie :*
Pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* N *tel que*

$$n \geq m > N \Rightarrow |u_{m+1} + u_{m+2} + ... + u_n| \leq \varepsilon$$

Exemple 2.3. *La série harmonique* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente. En effet, pour tout* $m \geq 1$*, on a*

$$S_{2m} - S_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + ... + \frac{1}{2m} > \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + ... + \frac{1}{2m} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

la série diverge car en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *et en posant* $m = N$ *et* $n = 2m$ *pour tout* N*, la négation du critère de Cauchy est vérifie*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N\ \exists m\ \exists n : \quad [n \geq m \geq N \text{ et } |S_n - S_m| < \varepsilon]$$

2.4 Suites et séries

Théorème 2.6. *La suite numérique* $(a_n)_n$ *est convergente si, et seulement si, la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *où* $u_n = a_{n+1} - a_n$ *pour* $n \geq 1$ *est convergente.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} - a_0.$$

Exemple 2.4. *La série* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge. En effet,*

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = a_{n+1} - a_n$$

avec

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

on a

$$S_n = -\frac{1}{n+1} + 1$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$ *et la série est convergente.*

Exemple 2.5. *La série* $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *est divergente. En effet,*

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = a_{n+1} - a_n$$

avec $a_n = \ln n$, *on a*

$$S_n = \ln(1 + n)$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ *et la série diverge.*

2.5 Séries à termes positifs

Définition 2.3. *Une série* $\sum_{n \geq 0} u_n$ *est dite à termes positifs si* $u_n \geq 0$ *pour tout* n.

Théorème 2.7 (Condition nécéssaire et suffisante)**.** *Pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée.*

Preuve. La suite des sommes partielles (S_n) vérifie $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$, ainsi (S_n) est croissante. Elle converge donc si, et seulement si, elle est majorée.

Remarque 2.1. *Une série à termes positifs divergente tend nécessairement vers* $+\infty$.

Exemple 2.6. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente. En effet,*

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

d'ou

$$\begin{aligned} S_m &= 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{m^2} \\ &< 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + ... + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = 2 - \frac{1}{m} < 2 \end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente puisque ses sommes partielles sont majorées par* 2 *et l'on a* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Théorème 2.8. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \leq v_n$ *pour tout* n*, on a :*
Si la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ *est convergente alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge alors la série* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *diverge aussi.*

Exemple 2.7. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est divergente. En effet* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ *i.e.*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

comme la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente, ceci entraine que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est divergente.*

Théorème 2.9. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \sim v_n$ *où encore* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$*, les séries sont toutes deux convergentes où toutes deux divergentes.*

Exemple 2.8. *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n^3+n^2+n+1}$ *est convergente. En effet,*

$$u_n = \frac{n+2}{n^3+n^2+n+1} = \frac{1}{n^2}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \sim \frac{1}{n^2}$$

puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente, alors* $\sum_{n\geq 0} \frac{n+2}{n^3+n^2+n+1}$ *est convergente aussi.*

Exemple 2.9. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *est divergente. En effet,*

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$$

puisque la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente, alors la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *est divergente aussi.*

Corollaire 2.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs. Si* $u_n \sim a v_n$ *où encore* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = a$ $(a$ *fini,* $\neq 0)$, *les séries sont toutes deux convergentes où toutes deux divergentes.*

Exemple 2.10. *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{n^2+1}$ *est divergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n+3}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = 2$$

comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3}{n^2+1}$ *diverge aussi.*

Théorème 2.10 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

Si $l < 1$, *la série est convergente. Si* $l > 1$ *la série est divergente. Si* $l = 1$ *on ne peut rien dire.*

Exemple 2.11. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$ *est divergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n}\frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

Donc la série est convergente.

Exemple 2.12. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Théorème 2.11 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

Si $l < 1$*, la série est convergente. Si* $l > 1$ *la série est divergente. Si* $l = 1$*, on ne peut rien dire.*

Exemple 2.13. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$ *est convergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

Exemple 2.14. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n}$ *est convergente. En effet,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Exemple 2.15. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$.

Théorème 2.12 (Comparaison des critères de Cauchy et de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Si la limite*

$$l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

existe, alors

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

Remarque 2.2. *Le critère de Cauchy est donc plus fort que celui de d'Alembert.*

Exemple 2.16. *Soit la série de terme général*

$$u_n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad a \in \left]0, 1\right[,$$

alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}2a & \text{si } n \text{ est pair}\\ \frac{a}{2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

d'ou $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *n'existe pas, par contre*

$$\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}a & \text{si } n \text{ est pair}\\ a\quad {}^{n}\sqrt{2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

ce qui donne

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=a.$$

Théorème 2.13 (Comparaison avec une intégrale)**.** *Soit f une fonction continue et définie pour* $x\geq 1$*, positive et décroissante. Posons*

$$u_1=f(1)\,,\quad u_2=f(2)\,,\ ...,\ u_n=f(n)\,,...$$

pour que la série $u_1+u_2+...+u_n+...$ *soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale* $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ *soit convergente.*

Corollaire 2.3. *Soit* α *un paramètre réel. La série*

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...(\text{série de Riemann})$$

est convergente si $\alpha>1$*, divergente si* $\alpha\leq 1$*.*

Exemple 2.17. *La série* $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{a^n}$ *,* $a>1$ *est convergente. En effet,*

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{a^x}=\int_1^{+\infty}e^{-x\ln a}dx=-\frac{e^{-x\ln a}}{\ln a}\bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{a\ln a}$$

Corollaire 2.4. *Soit* $\sum\limits_{n\geq1}u_n$ *une série à termes positifs. Si* $u_n\sim\frac{k}{n^\alpha}$ *pour* $n\to+\infty$*, où* k *est une constante positive. Alors*

a) $\sum\limits_{n\geq1}u_n$ *est convergente si* $\alpha>1$*.*

b) $\sum\limits_{n\geq1}u_n$ *est divergente si* $\alpha\leq 1$*.*

Exemple 2.18. *La série* $\sum\limits_{n\geq1}\frac{1}{n^2+n+1}$ *est convergente. En effet,* $\frac{1}{n^2+n+1}\sim\frac{1}{n^2}$*.*

Exemple 2.19. *La série* $\sum\limits_{n\geq1}\sin\left(\frac{x}{n^p}\right)$ *est convergente si* $p>1$*, et divergente si* $p\leq1$*. En effet,* $\sin\left(\frac{x}{n^p}\right)\sim\frac{x}{n^p}$*.*

2.6 Séries à termes quelconques

2.6.1 Séries absolument convergentes

Définition 2.4. *Une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est dite absolument convergente si la série des modules* $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ *est convergente.*

Théorème 2.14. *Une série absolument convergente est convergente.*

Définition 2.5. *Une série est dite semi-convergente si elle est convergente et n'est pas absolument convergente.*

Théorème 2.15. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série absolument convergente. Soit* $n \mapsto \sigma(n)$ *une permutation de* $\{1, 2, ..., n\}$*, et posons*

$$v_n = u_{\sigma(n)}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ *est absolument convergente, et l'on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque 2.3. *Le théorème n'est pas vrai pour les séries semi-convergentes.*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + ...$$

$S(u)$ est positive est vaut $S(u) = \ln 2$. Permutons de la manière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} v_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + ...$$

on a alors

$$S_{3n}(v) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}(u)$$

d'où

$$S(v) = \lim_{n\to+\infty} S_{3n}(v) = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} S_{2n}(u) = \frac{S(u)}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

2.6.2 Séries alternées

Définition 2.6. *Une série est dite alternée si ses termes sont alternativement positives et négatives. On note*

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n v_n, \quad \textit{avec } v_n \geq 0.$$

Théorème 2.16 (Théorème de Leibniz)**.** *Si la suite (v_n) est décroissante et tend vers zéro, la série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n v_n$ est convergente. De plus on a*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n v_n\right| \leq v_{n+1}.$$

Preuve. On montre sans peine que la suite (S_{2n}) est décroissante et la suite (S_{2n+1}) est croissante. En effet,

$$S_{2n} - S_{2n-2} = v_{2n} - v_{2n-1} \leq 0,$$
$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -v_{2n+1} + v_{2n} \geq 0.$$

De plus on a

$$S_{2n} - S_{2n+1} = v_{2n+1} \longrightarrow 0, \text{ quand } n \to +\infty$$

Ainsi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes donc convergentes vers la même limite, S, et on a

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$$

En retranchant soit S_{2n-1} soit S_{2n} on obtient
$0 \leq S - S_{2n-1} \leq v_{2n}$ et $-v_{2n+1} \leq S - S_{2n} \leq 0$. Ainsi

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^n v_n\right| \leq v_{n+1}.$$

Exemple 2.20. *On appelle série harmonique alternée, la série*

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n},$$

cette série est convergente.

2.7 Multiplication des séries

Théorème 2.17. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries absolument convergentes,* U *et* V *leurs sommes. Posons*

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + ... + u_n v_0 = \sum_{i+j=n} u_i v_j.$$

Alors, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ *(appelée série produit des séries données) est absolument convergente, et sa somme est* UV.

Exemple 2.21. *La série produit de deux séries convergentes peut être divergente. Calculons par exemple le produit de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

par elle même, on aura

$$w_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

il est évident que pour tout n, $|w_n| \geq 1$.

2.8 Exercices

2.8.1 Séries à termes positifs

Exercice 2.1. Soit

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1. Écrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{a}{n - \frac{1}{2}} + \frac{b}{n + \frac{1}{2}} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

2. Calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$.

Solution

Soit $u_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$, pour $n \geq 1$.
1. Écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{a}{n-\frac{1}{2}} + \frac{b}{n+\frac{1}{2}}$?
On peut voir facilement que $a = 1$ et $b = -1$. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}$$

2. On calcul

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (2 - \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} - \frac{2}{5}) + \ldots + (\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}) \\ &= 2 - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} (2 - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}) = 2.$$

Ainsi la série est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2.$$

Exercice 2.2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Montrer que les séries de termes généraux

$$w_n = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad t_n = u_n^2$$

sont convergentes.

Solution

1.

$$w_n = \sqrt{u_n v_n}$$

Remarquons que $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ ceci implique que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
Ainsi,
si $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \sqrt{v_n}$, on a :

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum \frac{u_n + v_n}{2}$ converge et par le théorème de comparaison $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

2.
$$t_n = u_n^2.$$
Puisque $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ainsi $u_n < 1$.
Donc $u_n^2 < u_n$ (car $u_n \geq 0$).
Par le théorème de comparaison $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 2.3. Soient les deux suites (u_n) et (v_n), on suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$.
1. Montrer que la suite (v_n) et la série $\sum u_n$ sont de même nature.
2. Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme :
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Solution

1. On a
$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_{n+1} - v_n) \\ &= v_{n+1} - v_0. \end{aligned}$$

Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_0).$$
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ est finie alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est finie et la série converge. Sinon, elle diverge.

2.
$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n.n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right). \end{aligned}$$

On pose
$$v_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$$

D'après la première question et puisque $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = 0$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = u_2 + u_3 + \ldots + u_n \\ &= \left(\ln\frac{3}{2} - \ln 2\right) + \left(\ln\frac{4}{3} - \ln\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2.$$

Exercice 2.4. Sommer les séries suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{7^{n-2}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}, \quad \alpha > 1, \text{ réel donné.}$$

Solution

1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{7^{n-2}} = 7^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n.$$

Une série géométrique de raison $\frac{3}{7}$ et de premier terme $\frac{3}{7}$. ainsi, la somme est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{7^{n-2}} = 7^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 7^2 \frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}} = 7^2 \frac{3}{4} = \frac{147}{4}.$$

2.

$$\text{On calcul} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!} \qquad \text{sachant que} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

On a

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}, \qquad n \geq 2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-1}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}-e=0+1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}-e\\
&= 0+1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}-e\\
&= 0+1+\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m!}-e\\
&= 0+1+e+(e-1)-e\\
&= e.
\end{aligned}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

$$\begin{aligned}
S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k &= u_1+u_2+\ldots+u_n\\
&= \left(1-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= 1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Ainsi la série est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

4.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-e}{\pi\alpha}\right)^n.$$

c'est une série géométrique de raison $q=\frac{-e}{\pi\alpha}$.
Puisque $\alpha>1$, alors

$$\pi\alpha>\pi\Rightarrow\frac{1}{\pi\alpha}<\frac{1}{\pi}\Rightarrow\frac{e}{\pi\alpha}<\frac{e}{\pi}$$

Donc $|q|=\frac{e}{\pi\alpha}<\frac{e}{\pi}<1$ ainsi la série géométrique est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-e}{\pi\alpha}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{e}{\pi\alpha}}=\frac{\pi\alpha}{\pi\alpha+e}.$$

Exercice 2.5. Trouver la nature de la série qui a pour terme général

1. $u_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$ 2. $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$ 3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

4. $u_n = \left(\dfrac{\sin^2(n)}{n}\right)^n$ 5. $u_n = 3^{-n} + 5^{-n}$ 6. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

7. $u_n = \dfrac{2^n}{\cosh n}$ 8. $u_n = \left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$ 9. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n}$.

Solution

1. Soit la série $\sum \dfrac{1+n^2}{n!}$. Appliquons la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{1+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(n+1)^2}{(n+1)(1+n^2)} = 0 < 1.$$

Ainsi, la série $\sum \dfrac{1+n^2}{n!}$ converge.

2. Soit la série $\sum \dfrac{n!}{a^n}$. Appliquons la règle de d'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}.\frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{a} = +\infty > 1.$$

Ainsi, la série $\sum \dfrac{n!}{a^n}$ diverge.

3. Soit la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$. Appliquons la règle de d'Alembert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}} \\ &= \frac{1}{e} < 1.\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

4. Soit la série $\sum \left(\dfrac{\sin^2 n}{n}\right)^n$. Appliquons la règle de Cauchy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin^2 n}{n}\right) = 0 < 1.$$

Ainsi, la série $\sum \left(\dfrac{\sin^2 n}{n}\right)^n$ converge.

5. $\sum(3^{-n}+5^{-n}) = \sum \frac{1}{3^n} + \sum \frac{1}{5^n}$. La somme de deux séries géométriques convergentes est une série qui converge.

6. Soit la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$. Appliquons la règle de Riemann

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n &= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{2\ln n - \sqrt{n}\ln 2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}\left(-2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+\ln 2\right)} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ converge.

7. Soit la série $\sum \frac{2^n}{\text{ch} n}$. On a

$$\frac{2^n}{\text{ch} n} = \frac{2^n}{\frac{e^n+e^{-n}}{2}} = 2\frac{2^n e^n}{e^{2n}+1}.$$

Appliquons la règle de Cauchy à la série $\sum \frac{2^n e^n}{e^{2n}+1}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n e^n}{e^{2n}+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2e}{(e^{2n}+1)^{\frac{1}{n}}} = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e} < 1.$$

Ainsi, la série $\sum \frac{2^n}{\text{ch} n}$ converge.

8. Soit la série $\sum \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$. Appliquons la règle de Cauchy

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\frac{n^2-4n+2-n-1}{n^2-4n+2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{n+1}{n^2-4n+2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{n+1}{n^2-4n+2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= e^{-1} < 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$ converge.

9. Soit la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$. Appliquons la règle de Cauchy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

Ainsi, la série $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ converge.

Exercice 2.6. Trouver la nature de la série qui a pour terme général,

$$\mathbf{1.}\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}},\quad \mathbf{2.}\ u_n = \sqrt{\frac{n}{n^4+1}},\quad \mathbf{3.}\ u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbf{4.}\ u_n = \frac{1}{\ln n},\quad \mathbf{5.}\ u_n = 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),\quad \mathbf{6.}\ u_n = \frac{3^n+n^4}{5^n-3^n},$$

$$\mathbf{7.}\ e^{an^2}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^3},\quad \mathbf{8.}\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Solution

1. Soit la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$, remarquons que

$$\begin{aligned} n^2+2n^2 &\geq n^2+2n \\ \Rightarrow \sqrt{3n^2} &\geq \sqrt{n^2+2n} \\ \Rightarrow \frac{1}{n\sqrt{3}} &\leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \end{aligned}$$

la série $\sum \frac{1}{n\sqrt{3}}$ est divergente donc, par le théorème de comparaison, la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ est divergente.

2. Soit la série $\sum \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$.

On sait que $n^4 \leq n^4+1$ alors

$$\begin{aligned} &\frac{n^4}{n^4+1} \leq 1 \\ \Rightarrow\ &\frac{n}{n^4+1} \leq \sqrt{\frac{1}{n^3}} \\ \Rightarrow\ &\frac{n}{n^4+1} \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

la série $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente donc, par le théorème de comparaison, la série $\sum \sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$ est convergente.

3. Soit la série $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$, puisque $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, alors $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ est divergente car $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

4. La série $\sum \dfrac{1}{\ln n}$ est divergente puisque $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$.

5. Soit la série $\sum (1 - \cos \dfrac{\pi}{n})$. On a

$$1 - \cos \frac{\pi}{n} \sim_\infty \frac{\pi^2}{2n^2} \qquad \text{car} \qquad 1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}.$$

Ainsi, puisque $\sum \dfrac{\pi^2}{2n^2}$ est convergente (série de Riemann) alors $\sum (1 - \cos \dfrac{\pi}{n})$ est convergente.

6. Soit $\sum \dfrac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$, nous remarquons que $\frac{3^n+n^4}{5^n-3^n} \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et puisque $\sum \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ est convergente (série géométrique de raison $q = \frac{3}{5} < 1$), alors la série $\sum \dfrac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$ est convergente.

7. Soit $\sum e^{an^2} \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$, appliquons la règle de Cauchy

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{an^2} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} e^{an} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{an} e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{a}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{an + n^2\left(-\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{an - an - \frac{a^2}{2} + n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e^{-\frac{a^2}{2}} < 1, \quad (a > 0),
\end{aligned}$$

et par suite la série $\sum e^{an^2} \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$ est convergente.

8. La série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente. En effet, il suffit de remarquer que $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$.

2.8.2 Séries numériques à termes quelconques

Exercice 2.7. Etudier la convergence et la convergence absolue des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessous.

$$\begin{array}{llll}
1. & u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right), & 2. & u_n = \dfrac{1}{n \ln n. \ln(\ln n)}, \\
3. & u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right), & 4. & u_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{5^n}, \\
5. & u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}, & 6. & u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}+n}, \\
7. & u_n = \dfrac{\sin(2n)}{n^2 - n + 1}, & 8. & u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right).
\end{array}$$

Solution

1. Soit $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$, nous remarquons que $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, ainsi puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge aussi.

2. Soit $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}$.
On pose $f(x) = \frac{1}{x\ln x \ln(\ln x)}$ et on calcul

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx = \lim_{b\to+\infty}[\ln(\ln(\ln x))]_2^b = +\infty.$$

Ainsi l'intégrale diverge donc $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$ diverge.

3. Soit $\sum \frac{(-1)^n}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}$
On a $|\frac{(-1)^n}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}$, on sait que $\text{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ donc $\frac{1}{n}\text{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, ainsi la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}\text{arctg}\frac{1}{n}$ est absolument convergente donc convergente.

4. Soit la série $\sum (-1)^n \frac{n^2}{5^n}$
$|(-1)^n\frac{n^2}{5^n}| = \frac{n^2}{5^n}$, appliquons la règle de d'Alembert
$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}\frac{5^n}{n^2} = \frac{1}{5} < 1$, donc la série $\sum(-1)^n\frac{n^2}{5^n}$ converge absolument donc converge.

5. Soit la série $\sum(-1)^n\frac{\ln n}{n}$, appliquons le critère de Leibniz

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$
- $\frac{\ln n}{n}$ est décroissante à partir de $n > e$, ainsi $\sum_{n\geq 3}(-1)^n\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln 2}{2}$ est

convergente.

6. Soit la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}+n}$ est convergente car (par le critère de Leibniz) :

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$
- $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ est décroissante.

7. Soit $\sum \frac{\sin 2n}{n^2-n+1}$, nous remarquons que
$|\frac{\sin 2n}{n^2-n+1}| \leq \frac{1}{n^2-n+1} \sim \frac{1}{n^2}$, la série $\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann

$\alpha = 2 > 1$) ainsi la série $\sum \frac{\sin 2n}{n^2 - n + 1}$ est absolument convergente donc convergente.

8. Soit $\sum n \sin \frac{1}{n^2}$, on a $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc $n \sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$, la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique) ainsi $\sum n \sin \frac{1}{n^2}$ est divergente.

Exercice 2.8. Étudier la nature des séries suivantes

1. $\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n^2+1}[(-1)^n n + k],}$ **k est un réel,**
2. $\boldsymbol{u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n).}$

Solution

1. Soit $\sum \frac{1}{n^2+1}[(-1)^n n + k]$, $k \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^2+1}[(-1)^n n + k] = \sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1} + \sum \frac{k}{n^2+1}$$

comme $\frac{k}{n^2+1} \sim \frac{k}{n^2}$ donc $\sum \frac{k}{n^2+1}$ converge.

$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$, nous remarquons que

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$ et
- $\frac{n}{n^2+1}$ est décroissante .

Alors par le critère de Leibniz, la série $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ est convergente. D'ou la série $\sum \frac{1}{n^2+1}[(-1)^n n + k]$ est convergente.

2. La série $\sum (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - n)$ est convergente car

$$\frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{(\sqrt{n^2+1} + n)} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

Nous remarquons facilement que $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ est décroissante et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0 \text{ (critère de Leibniz).}$$

Exercice 2.9. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}.$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Solution

Soit la série $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$.

1. On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\alpha n + 1} = 0$ et $\frac{1}{\alpha n+1}$ est décroissante. Ainsi, par le critère de Leibniz $\sum \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1}$ est convergente.

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{\alpha n} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-t^\alpha)^n dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^\alpha)^{N+1}}{1+t^\alpha} dt$$

quand $N \to +\infty$, $(-t^\alpha)^{N+1} \to 0$, ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha n + 1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha} dt.$$

2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2).$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{arctg}(t)]_0^1 = \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2.10. On considère les intégrales :

$$n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^{2n} dt.$$

1. Vérifier l'égalité : $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.
2. Montrer que $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
3. En déduire de ces résultats la somme de la série

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Solution

Soit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^{2n} dt$$

1. Montrons que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.
On a

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^{2n} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^{2n+2} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^{2n} \left[1 + (\tan t)^2\right] dt = \left[\frac{(\tan t)^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}.$$

2. Puisque $I_n \geq 0$, on a alors

$$0 \leq I_n \leq I_n + I_{n+1}$$
$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

donc $I_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2p+1} &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p (I_p + I_{p+1}) \\
&= (I_0 + I_1) + (-I_1 - I_2) + \ldots ((-1)^n I_n + (-1)^n I_{n+1}) \\
&= (-1)^n I_{n+1} + I_0.
\end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = I_0.$$

car $I_{n+1} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

2.9 Exercices supplémentaires

Exercice 2.11. Étudier la nature des séries suivantes et calculer leurs sommes si elles existent :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}, \qquad \sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right), \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{\tan\frac{1}{2^{n+1}}}{\cos\frac{1}{2^n}},$$

$$\sum_{n\geq 0} nq^n \quad, 0<q<1, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-3}{n!}a^n, \text{ sachant que } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a,$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(n+1)^2}{n!}.$$

Exercice 2.12. Étudier la nature des séries de terme général U_n suivantes :

$$U_n = \frac{n!}{n^3 n^n}, \qquad U_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad U_n = \frac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^n},$$

$$U_n = \frac{n+2}{n^3+1}, \qquad U_n = \frac{\sqrt{3^n}}{3n+1}, \qquad U_n = \left(\frac{n-1}{3n}\right)^n,$$

$$U_n = \left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n}{2}}, \qquad U_n = \frac{a^n}{n+b^n}, \quad a>0,\ b>0.$$

Exercice 2.13. a) Étudier la nature de la série de terme général $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

b) Établir une relation entre la somme partielle S_n de la série précédente et la suite (p_n)

$$p_n = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

c) En déduire la nature de la suite (p_n).

Exercice 2.14. [Formule de Stirling] Soit

$$f(n) = \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}.$$

a) Calculer $f(n+1)$ et $\frac{f(n+1)}{f(n)}$.

b) Montrer que la série de terme général $a_n = \ln f(n+1) - \ln f(n)$ converge. En utilisant la somme partielle S_{n-1} de la série $\sum a_n$, montrer que $f(n)$ possède une limite L.

c) Déterminer L en admettant que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2.4.6...(2n)}{\sqrt{n}1.3.5...(2n-1)} = \sqrt{\pi}.$$

(on calculera $\frac{f^2(n)}{f(2n)}$).

d) En déduire que $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Exercice 2.15. Est ce que la série de terme général

$$U_n = \frac{1}{\ln^2 2 + \ln^2 3 + \ldots + \ln^2 n}$$

est convergente.

Exercice 2.16. 1. Étudier la nature des séries de terme général U_n suivantes :

$$U_n = \frac{1}{n\,(n+\ln n)}, \qquad U_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

$$U_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad U_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

2. Par comparaison avec une intégrale, donner la nature des séries de terme général :

$$U_n = \frac{1}{n^2}, \qquad U_n = \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}, \qquad U_n = \frac{\ln n}{n}.$$

3. Donner la nature des séries de terme général U_n (divergence, semi-convergence, convergence absolue) :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \qquad U_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{10^n}\right), \qquad U_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

Exercice 2.17. Soit la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ et soit S sa somme :

1. Prouver, après avoir calculer S_{10}, que $-0.75 \leq S \leq -0.64$.

2. Combien faut-il de termes dans la série pour calculer sa somme à 0.01 près et à 0.001 près ?

Exercice 2.18. Donner la nature des séries suivantes:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{a^n}{n}, \quad a \in \mathbb{R}^{*+},$$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Exercice 2.19. **1. Soit u_n une suite de nombres réels et positifs. Montrer que, si $\sum_{p\geq 0} u_{2p}$ converge et $\sum_{p\geq 0} u_{2p+1}$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.**

2. Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+1}{n}\right)$,

b) $u_n = \tanh\frac{1}{n} + \ln\frac{n^2-n}{n^2+1}$,

c) $u_n = (n^a+1)^{\frac{1}{a}} - \left(n^b+1\right)^{\frac{1}{b}}$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightharpoonup \mathbb{R}$ une application continue vérifiant la propriété suivante :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

pour tout λ dans $\mathbb{R}$.

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que $\sum_{n\geq 0} x_n^2$ et $\sum_{n\geq 0} y_n^2$ convergent.

Montrer que $\sum_{n\geq 0} [f(x_n, y_n)]^2$ converge.

Exercice 2.20. **I. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.**

1. Montrer que les séries de termes généraux suivants sont convergentes :

a) $(u_n v_n)^{1/2}$,

b) $\left(u_n v_n^2\right)^{1/3}$,

c) $\frac{u_n v_n}{a u_n + b v_n}$, a, $b > 0$.

(Indication : Utiliser $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k x^{p\text{-}k} y^k$, ou $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$).

2. En déduire que les séries $\left(\frac{u_1}{1^2}\right)^{1/2} + \left(\frac{u_2}{2^2}\right)^{1/2} + \ldots + \left(\frac{u_n}{n^2}\right)^{1/2} + \ldots$ et $\left(\frac{u_1}{1^4}\right)^{1/3} + \left(\frac{u_2}{2^4}\right)^{1/3} + \ldots + \left(\frac{u_n}{n^4}\right)^{1/3} + \ldots$ sont convergentes. Généraliser.

II. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, et $u_n = \frac{3n-1}{3n} u_{n-1}$ pour $n > 0$. On pose $S_0 = 1$ et $S_n = \frac{u_n}{n^\alpha}$ pour $n > 0$.

1. Montrer que la suite $(\ln S_n)$ est de même nature que la série de terme général $\ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$, et prouver que

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = 1 - \left(\frac{2}{3} + \alpha\right)\frac{1}{n} + \frac{3\alpha^2 - \alpha}{3}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Pour quelle valeur de α la suite (S_n) converge (On discutera suivant les valeurs de α) ?. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

III. Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} S'_{2n} x^{2n}$,ou $S'_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

a) Quel est son rayon de convergence R ? La série converge-t-elle pour $x = R$?

b) On note f(x) la somme de cette série lorsqu'elle converge. On pose $g(x) = (1 + x^2)f(x)$. Montrer que, pour $x < R$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

En déduire une expression pour $g(x)$, puis pour $f(x)$.

Chapitre 3

Séries de fonctions

Sommaire

3.1 Convergence simple et convergence uniforme 45
3.2 Propriété des séries uniformément convergentes 47
3.3 Exercices 49
3.4 Exercices supplémentaires 52

3.1 Convergence simple et convergence uniforme

Définition 3.1. *Soit* $x \longmapsto u_0(x)\,,\ x \longmapsto u_1(x)\,, \ldots\ x \longmapsto u_n(x)\,, \ldots$ *des fonctions définies dans un ensemble* E*. La série*

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

s'appelle série de fonctions. Elle peut être convergente pour certaines valeurs de x*, diverge pour d'autres. Soit* $D \subset E$ *l'ensemble des* x *dans* E *tels que la série soit convergente ; alors*

$$x \longmapsto f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

est une fonction définie dans E*. On dit qu'on a un développement en série de fonctions définie dans* D*.* D *est appelé domaine de convergence de la série de fonctions. Soit*

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x)$$

alors la suite de fonctions $S_0,\ S_1,\ \ldots, S_n, \ldots$ *tend vers* f *simplement dans* D*.*

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = f \Longleftrightarrow \forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{x,\varepsilon} \text{ tel que}$$

$$[\forall n \geq N_{x,\varepsilon} \Longrightarrow |S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon]$$

Exemple 3.1. *Considérons la série géometrique* $\sum_{n\geq 1} x^n$ *cette série est convergente dans l'intervalle* $]-1,1[$ *vers* $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Soit $x \in]-1,1[$, *on a*

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1-x^n}{1-x}$$

les nombres $x \in]-1,1[$, $\varepsilon > 0$ *étant donnés, cherchons* $N_{x,\varepsilon}$ *:*

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Longrightarrow \frac{|x|^n}{1-x} < \varepsilon$$

il suffit de choisir

$$N > \frac{\ln[\varepsilon(1-x)]}{\ln|x|}.$$

Définition 3.2 (Convergence uniforme)**.** *Si la suite de fonctions* $S_0, S_1, ..., S_n, ...$ *tend vers* f *uniformément dans D, on dit que la série*

$$u_0(x) + u_1(x) + ... + u_n(x) + ...$$

converge uniformément vers f *dans D, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \ \ \forall x \in D \ \ \forall n \ \ [n \geq N \Longrightarrow |S_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon],$$

où encore

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - f\| = 0 \qquad où \quad \|S_n - f\| = \sup_{x\in D} |S_n(x) - f(x)|.$$

Exemple 3.2. *On sait que la série* $\sum_{n\geq 0} x^n$ *converge sur* $]-1,1[$ *vers la somme* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *Cependant la convergence n'est pas uniforme sur* $]-1,1[$ *puisque*

$$\|s_n - f\| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \left(\left| \frac{x^n}{1-x} \right| \right) = +\infty, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \|s_n - f\| = +\infty.$$

Par contre dans chaque intervalle $[-\delta, \delta]$, $0 < \delta < 1$, *la convergence est uniforme*

$$\forall x \in [-\delta, \delta] : \|s_n - f\| = \frac{\delta^n}{1-\delta} \to 0, \quad quand\ n \to +\infty.$$

Théorème 3.1. *La convergence uniforme implique la convergence simple.*

En effet ;

$$\forall x\ \ \forall n:\ |S_n(x) - f(x)| \leq \|s_n - f\|$$

Théorème 3.2 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme des séries)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions dans I. Pour que cette série converge uniformément dans I, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que*

$$n \geq m \geq N \Longrightarrow |u_{m+1}(x) + u_{m+2}(x) + ... + u_n(x)| \leq \varepsilon, \qquad \forall x \in I.$$

Théorème 3.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions dans I. Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$ des constantes positives telles que la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ soit convergente. Si*

$$|u_1(x)| \leq \alpha_1, \quad |u_2(x)| \leq \alpha_2, \ ..., \quad |u_n(x)| \leq \alpha_n, ...$$

dans I, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est uniformément convergente dans I.

Exemple 3.3. *Étudier la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ dans l'intervalle $[-a, a]$ avec $a < 1$. En effet,*

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{a^n}{n^2}$$

3.2 Propriété des séries uniformément convergentes

Théorème 3.4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions tendant uniformément vers une fonction $S(x)$ dans I. Si les u_n sont continues, alors $S(x)$ est une fonction continue.*

Théorème 3.5. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions dans $[a, b]$, tendant uniformément vers S. Si les u_n sont continues dans $[a, b]$. Soit x_0 un point de $[a, b]$. Alors la série des primitives*

$$\sum_{n\geq 0} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt$$

converge uniformément dans $[a, b]$ vers la primitive $\int_{x_0}^{x} S(t)\, dt$.

Exemple 3.4. *La série*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

converge uniformément sur chaque intervalle $[a,b] \subset [-1,1]$. *On peut donc l'intégrer terme à terme de* 0 *à* x, $|x| < 1$. *On a*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Corollaire 3.1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série de fonctions continues dans* $[a,b]$, *tendant uniformément vers* $S(x)$. *Alors*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\, dt.$$

On dit qu'on peut intervertir la sommation et l'intégration.

Théorème 3.6. *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle et* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série de fonctions définie sur* I *telle que*

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n *est dérivable sur* I.
2. $\exists x_0 \in I$, *tel que la série numérique* $\sum_{n\geq 0} u_n(x_0)$ *est convergente.*
3. *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n'$ *converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné* $[a,b] \subset I$,

alors

1. *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est uniformément convergente sur tout intervalle* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *fermé et borné* $[a,b] \subset I$.
2. *La somme* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ *est dérivable sur* I *et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)'.$$

Preuve. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k'$, on a la suite (S'_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction G, et $\exists x_0 \in [a,b]$ tel que $(S_n(x_0))$ converge vers l.

Alors d'après le théorème 3.5 la suite (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers $l + \int_{x_0}^{x} G(t)dt$ et

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \longrightarrow l + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u'_n(t))dt.$$

Soit $S(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = l + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=0}^{+\infty} u'_n(t))dt$ puisque $\sum u'_n$ converge uniformément alors $S\,'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

3.3 Exercices

Exercice 3.1. Montrer que les séries suivantes convergent simplement, uniformément et non normalement sur I :

1. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2}$, $I = \mathbb{R}$, **2.** $\sum \frac{(-1)^n x^2}{x^4 + n}$, $I = \mathbb{R}$.

Solution

1. Soit $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

On peut voir facilement que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+x^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Donc la série ne converge pas normalement.

Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+x^2}$, nous remarquons facilement que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ et $(|u_n|)$ est décroissante, donc la série alternée $\sum_{n\geq 0} u_n$ est simplement convergente (théorème de Leibniz). On a

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq |u_{k+1}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0,$$

ainsi $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$, donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^2}{x^4 + n}$,$I = \mathbb{R}$.

Pour $x = 0$, on a la série nulle qui converge.

Pour $x \neq 0$, $\frac{x^2}{x^4+n} \to_{n\to+\infty} 0$ et $\frac{x^2}{x^4+n}$ est décroissante donc la série converge simplement sur $\mathbb{R}$ (théorème de Leibniz).

On a $|\frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}| \sim \frac{x^2}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^2}{n}$ diverge donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.

On a

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^2}{x^4+n+1} = h(x),$$

$$h'(x) = \frac{2x(-x^4+n+1)}{(x^4+n+1)^2},$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x^4 = n+1 \Rightarrow x^* = (n+1)^{\frac{1}{4}},$$

$$h(x^*) = \frac{\left((n+1)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{n+1+n+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to_{n\to+\infty} 0.$$

Ainsi $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \to_{n\to+\infty} 0$, donc la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.2. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.
2. Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$.

Solution

1. Soit

$$\sum_{n\geq 0} x^{2n}.$$

Nous avons sur $[0,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2},$$

ainsi la série converge simplement sur $[0,1[$.

2. Sur $[0,a]$, $a<1$, nous avons $x^{2n} \leq a^{2n}$ avec $\sum_{n\geq 0} a^{2n}$ qui converge. Ainsi, par le critère de comparaison la série $\sum_{n\geq 0} x^{2n}$ converge normalement donc uniformément sur $[0,a]$, $a<1$.

Exercice 3.3. Montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(\sin(x))^n}$$

est continue sur $]0,\pi[$.

Solution

Soit

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!(\sin x)^n}.$$

Sur $[a,b]\subset]0,\pi[$ la fonction $\sin(x)$ est continue donc elle atteint son minimum qui n'est pas nul, donc il existe m tel que,$\forall x\in[a,b]$, $\sin x\geq m>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!(\sin x)^n}\leq\frac{1}{n!m^n},$$

et $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!m^n}$ converge. Ainsi la série converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$, de plus $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{n!(\sin x)^n}$ est continue sur $]0,\pi[$. Donc f est continue sur $]0,\pi[$.

Exercice 3.4. Soit $I=]1,+\infty[$. Pour $x\in I$, on pose

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$$

1. Vérifier que f est définie sur I.
2. Montrer que f est continue sur I.
3. Montrer que f est dérivable sur I.

Solution

1. f est bien définie car

$$\frac{1}{1+x^n}\leq\frac{1}{x^n},$$

avec $\sum\left(\frac{1}{x}\right)^n$ qui converge puisque $x\in]1,+\infty[$.

2. Soit $a>1$,

$$x\geq a\Rightarrow\frac{1}{1+x^n}\leq\frac{1}{a^n}.$$

La série $f(x)$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Comme les fonctions $x\mapsto\frac{1}{1+x^n}$ sont continues sur $]1,+\infty[$, il en résulte que f est continue sur $[a,+\infty[$. Comme ceci est vrai quel que soit $a>1$, il en résulte que f est continue sur $]1,+\infty[$.

3. On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\mapsto u_n(x)=\frac{1}{1+x^n}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$u_n'(x)=\frac{-nx^{n-1}}{(1+x^n)^2},$$

$$|u_n'(x)| = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq \frac{n}{a^{n+1}},$$

avec $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{a^{n+1}}$ converge. Ainsi $\sum_{n\geq 0} u_n'$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 1$.

Il en résulte que f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3.5. On considère la série de fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Solution

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\frac{\sin x}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3},$$

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin x}{n^3}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque f converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, donc f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)dx &= \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}}{n^3} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^4} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.
\end{aligned}$$

3.4 Exercices supplémentaires

Exercice 3.6. Étudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions de terme général :

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{x}{(1+x^2)^n}, \qquad U_n = (\sin^{\alpha} x)(\cos^n x), \quad \alpha > 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
U_n &= x^n \tan\frac{x}{2^n}, \qquad U_n = e^{-nx}\cos nx.
\end{aligned}$$

Exercice 3.7. Soit $U_0 = 0$ et

$$U_n = (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \quad \text{si } n \geq 1$$

Montrer que cette série de terme général U_n est uniformément convergente sur tout segment $[a,b]$,mais n'est pas absolument convergente pour aucune valeur de x.

Exercice 3.8. Pour tout $n > 0$ et tout élément x de $]0, 2\pi[$ on pose

$$U_n(x) = \frac{x \sin x}{2\sqrt{n} + \cos x}.$$

1. Montrer que la série de terme général défini par $U_0 = 0$ et $U_n(x)$ si $n \geq 1$ est simplement convergente sur $]0, 2\pi[$.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle fermé inclus dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 3.9. Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes après avoir déterminé leur domaine de définition

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}, \qquad g(x) = \sum_{n \geq 1} \arctan\left(\frac{x}{n\sqrt{n}}\right),$$

$$h(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n} - x^{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 3.10. Montrer que la série de terme général $U_0(x) = 0$ et

$$U_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \text{ pour } n \geq 1$$

est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. que peut on dire de la série de terme général $U'_n(x)$.

Exercice 3.11. Soit h un nombre réel strictement positif, montrer que la série de terme général ne^{-nx} est uniformément convergente sur $[h, +\infty[$ .Soit $f(x)$ sa somme, calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ où a et b deux nombres réels tels que $h < a < b$.

Exercice 3.12. Soit la série de fonctions de terme géneral

$$U_n(x) = \ln\left(1 + x^{2^n}\right).$$

1. Montrer qu'elle converge simplement pour tout $x \in]-1, 1[$.

2. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k(x) = \ln\left(\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\right).$$

3. En déduire

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(x) \quad \text{pour tout } x \in \,]-1,1[\,.$$

4. Justifier l'égalité suivante :

$$\forall\, x \in \,]-1,1[\,, \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}.$$

Chapitre 4

Séries entières

Sommaire

4.1 Définitions et propriétés 55
4.2 Rayon de convergence 56
4.2.1 Détermination du rayon de convergence 56
4.3 Propriétés des séries entières 57
4.4 Développement en séries entières 59
4.4.1 Applications 61
4.5 Exercices 64
4.6 Exercices supplémentaires 77

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1. *On appelle série entière de la variable réelle toute série de fonctions de la forme* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *où* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *sont des nombres réels ou complexes donnés, appelés coefficients de la série, et* $x \in \mathbb{R}$.

Définition 4.2. *L'ensemble* $D = \{x \in \mathbb{R},\ \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n \text{ converge}\}$ *est appelé domaine de convergence de la série.*

Exemple 4.1. *1.* $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$, $a_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *la série converge pour* $|x| < 1$, *ainsi* $D =]-1, 1[$.

2. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $a_n = \frac{1}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *la série converge pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *ainsi* $D = \mathbb{R}$.

3. $\sum\limits_{n\geq 0} n! x^n$, $a_n = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *la série ne converge que si* $x = 0$, *ainsi* $D = \{0\}$.

Proposition 4.1 (Lemme d'Abel)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière, s'il existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que la suite* $(a_n x_0^n)$ *est bornée alors* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *est absolument convergente pour* $|x| < |x_0|$.

Preuve. $(a_n x_0^n)$ est bornée donc $\exists M > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ on a $|a_n x_0^n| \leq M$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| \leq |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

Or $\sum M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ converge car $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Donc $\sum |a_n x^n|$ converge.

Corollaire 4.1. *Si* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *diverge pour* $x = x_0$*, alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *diverge pour tout* x *tel que* $|x| > |x_0|$.

4.2 Rayon de convergence

Définition 4.3. *On appelle rayon de convergence* R *d'une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *de domaine de convergence* D *le nombre*

$$R = \sup_{x\in D}\{|x|\}.$$

Remarque 4.1. R *peut être nul ou égal à* $+\infty$.

Théorème 4.1. *Soit* R *le rayon de convergence d'une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *alors*
i. $R = 0 \iff D = \{0\}$.
ii. $R = +\infty \iff D = \mathbb{R}$.
iii. Si $0 < R < +\infty$ *alors*

$$\begin{cases} |x| < R & \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ converge absolument.} \\ |x| > R & \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ diverge.} \end{cases}$$

Remarque 4.2. *Si* $|x| = R$ *on peut rien dire.*

Exemple 4.2. *1.* $\sum_{n\geq 0} x^n$, $R = 1$ *et* $D =]-1, 1[$.

2. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $R = +\infty$ *et* $D = \mathbb{R}$.
3. $\sum_{n\geq 0} n!x^n$, $R = 0$ *et* $D = \{0\}$.

4.2.1 Détermination du rayon de convergence

Proposition 4.2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière si* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ *(finie ou infinie) alors le rayon de convergence* $R = \frac{1}{l}$.

Exemple 4.3. *Soit la série entière*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!} x^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{(n)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0,$$

alors $R = +\infty$ *et* $D = \mathbb{R}$.

Proposition 4.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ *(finie ou infinie) alors le rayon de convergence* $R = \frac{1}{l}$.

Exemple 4.4. *Soit la série entière*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n^n} x^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

alors $R = +\infty$ *et* $D = \mathbb{R}$.

4.3 Propriétés des séries entières

Proposition 4.4. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge normalement (donc uniformément) sur tout intervalle* $[-r, r]$ *avec* $0 < r < R$.

Proposition 4.5. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et soit* $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *alors*

1. f *est continue sur* $]-R, R[$.

2. Les séries $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$ *et* $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *(obtenues en dérivant et intégrant la série* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *terme à terme) ont le même rayon de convergence que* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

3. On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *et* $\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\forall x \in]-R, R[$.

Exemple 4.5. *On a* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-1, 1[$, *alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \forall x \in]-1, 1[,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Proposition 4.6. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et soit* $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, *alors* f *est indéfiniment dérivable sur* $]-R, R[$, *et l'on a*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Théorème 4.2 (Théorème d'Abel)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R > 0$ *et de somme* S.

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ *converge alors* $\lim_{x\to R^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

2. Si $\sum_{n\geq 0} a_n (-R)^n$ *converge alors* $\lim_{x\to -R^+} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$.

Exemple 4.6. *On a* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad \forall x \in]-1, 1[$.

En $x = 1$*, la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

En $x = -1$*, la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge et on a*

$$\lim_{x\to -1^+} (-\ln(1-x)) = -\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

4.4 Développement en séries entières

Définition 4.4. *Soit* I *un intervalle ouvert contenant 0 et soit* f *une fonction définie et indéfiniment dérivable sur* I*. On appelle série de Taylor en 0(ou bien série de Mac-Laurin) de* f*, la série entière* $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Définition 4.5. *Une fonction* f *est développable en série entière en 0 s'il existe* $r > 0$*, tel que* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad x \in]-r, r[$.

Proposition 4.7. *Soit* f *une fonction indéfiniment dérivable dans un voisinage de 0. Si* f *est développable en série entière en 0 alors cette série est la série de Taylor en 0 (série de Mc-Laurin) :* $\exists r > 0, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in]-r, r[$.

Théorème 4.3. *Soit* f *une fonction indéfiniment dérivable sur* $]-R, R[$ *alors*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad \forall x \in]-R, R[,$$

si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$*, où* $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$*,* $0 < \theta < 1$ *(le reste de Taylor-Lagrange).*

Preuve. Le développement de Taylor de f à l'ordre n au voisinage de 0 (Développement de Mc-Laurin) est donné par

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}x^k+R_n(x).$$

donc

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \iff \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Corollaire 4.2. *Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$, s'il existe $M>0$ tel que $\forall x \in]-R,R[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(0)| < M$, alors f est développable en série entière en 0.*

Exemple 4.7.

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

où

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0<\theta<1 \\ |R_n(x)| &\leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \longrightarrow 0, \quad \textit{quand } n\to+\infty, \quad \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

4.4.1 Applications

Développement en séries entières de quelques fonctions élémentaires.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R = +\infty.$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R = +\infty.$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R = +\infty.$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R = +\infty.$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad R = +\infty.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ \alpha \in \mathbb{R}^*, \ \forall x \in]-1,1[, \ R = 1.$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad R = 1.$$

Résolution des équations différentielles

Exemple 4.8. *Soit l'équation différentielle*

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \tag{4.1}$$

telle que $y(0) = 1$*, on cherche une solution de (4.1) sous la forme d'une série entière* $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*,où les coefficients* a_n *sont à déterminer. On a*

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

En remplaçant dans l'équation (4.1)

$$\begin{aligned}
& 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0, \\
& \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0, \\
& \sum_{n=0}^{+\infty} 4(n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0, \\
& \sum_{n=0}^{+\infty} [(4(n+1)n + 2(n+1)) a_{n+1} - a_n] x^n = 0, \\
& \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n+2)(2n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0, \\
\Rightarrow \quad & (2n+2)(2n+1) a_{n+1} - a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
\Rightarrow \quad & a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

On a $a_0 = y(0) = 1$ *et* $a_n = \frac{1}{(2n)(2n-1)} a_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$*, ce qui implique que*

$$a_n = \frac{1}{(2n)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $R = +\infty$*,* $D = \mathbb{R}$ *et*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = ch(\sqrt{x}) & si\ x \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x}) & si\ x < 0. \end{cases}$$

Calcul approché d'intégrales

Exemple 4.9. *Calculons l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx$ avec une approximation à 0.01 près.*
Nous avons

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots$$

donc

$$I = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} + \ldots + \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$$

Soit

$$S_n = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} + \ldots + \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

D'après le théorème de Leibniz nous avons

$$|R_n| = |I - S_n| \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!}$$

Pour avoir l'approximation à 0.01 *près il suffit de choisir* n *tel que*

$$\frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)(2n+3)!} \leq 0.01$$

On trouve $n = 3$*, donc*

$$|I - S_3| \leq \frac{\pi^9}{9.9!} \leq 0.009127.$$

Comme

$$S_3 = \pi - \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^5}{600} - \frac{x^7}{35280} = 1.843250$$

on a $1.834123 < I < 1.852378$*. Ainsi* $I = 1.85$ *avec une erreur inférieure à* 0.01*.*

Exemple 4.10. *Calculons l'intégrale $\int_0^\alpha e^{-x^2}dx$*
Nous avons

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Intégrant les deux membres de cette égalité de 0 à α, on trouve

$$\int_0^\alpha e^{-x^2}dx = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{10} - \frac{\alpha^7}{42} + \ldots$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\frac{1}{n})x^n$, 2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}x^n$, 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)}x^n$,

4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\cosh n}$, 5. $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$, 6. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n!}x^n$,

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^{n^2}$, 8. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

Solution

Calculer le rayon de convergence des séries entièrs suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{\cos(0)}{\cos(0)} = 1.$$

Donc $R = 1$ et

- Si $|x| < 1$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ diverge.
- Si $|x| = 1$, posons $U_n(x) = \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} |U_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\cos\left(\frac{1}{n}\right)| = 1 \neq 0,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} U_n(x) \neq 0$ et la série diverge.

Ainsi le domaine de convergence est $D =]-1, 1[$.

2. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} x^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}}{\frac{(-1)^n}{\ln(n)}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = 1.$$

Donc $R = 1$ et

- Si $|x| < 1$ la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$ la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} x^n$ diverge.
- Si $|x| = 1$, i.e. $x = \pm 1$.
  - Si $x = 1$ alors $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} x^n = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est une série numérique alternée convergente (critère de Leibniz).
  - Si $x = -1$ alors $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} x^n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ est une série numérique divergente (car $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge).

Ainsi le domaine de convergence est $D =]-1, 1]$.

3. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n + \arctan(n)} x^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-2)^{n+1}}{n+1+\arctan(n+1)}}{\frac{(-2)^n}{n+\arctan(n)}} \right| = \lim_{n\to+\infty} 2\frac{1 + \frac{\arctan(n)}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{\arctan(n+1)}{n}} = 2.$$

Donc $R = \frac{1}{2}$ et

- Si $|x| < \frac{1}{2}$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n + \arctan(n)} x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > \frac{1}{2}$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n + \arctan(n)} x^n$ diverge.
- Si $|x| = \frac{1}{2}$, i.e. $x = \pm\frac{1}{2}$.
  - Si $x = \frac{1}{2}$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n + \arctan(n)} x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + \arctan(n)}$ est une série numérique alternée convergente (critère de Leibniz).
  - Si $x = -\frac{1}{2}$ alors $\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n + \arctan(n)} x^n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n + \arctan(n)}$ est une série numérique divergente (car $\frac{1}{n+\arctan(n)} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge).

Ainsi le domaine de convergence est $D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{\cosh(n)}$.

Posons $U_n(x) = \frac{x^{2n}}{\cosh(n)}$, nous remarquons que $\cosh(n) \sim \frac{e^n}{2}$ donc $U_n(x) \sim \frac{2x^{2n}}{e^n}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{2x^{2n+2}}{e^{n+1}}}{\frac{2x^{2n}}{e^n}} \right| = \frac{x^2}{e}.$$

• Si $\frac{x^2}{e} < 1 \iff |x| < \sqrt{e}$ alors la série entière converge absolument.

• Si $\frac{x^2}{e} > 1 \iff |x| > \sqrt{e}$ alors la série entière diverge.

• Si $|x| = \sqrt{e}$, alors $\lim_{n\to+\infty} |U_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\frac{e^n}{\cosh(n)}| = 2 \neq 0$,
donc $\lim_{n\to+\infty} U_n(x) \neq 0$ et la série diverge.

Ainsi $R = \sqrt{e}$ et le domaine de convergence est $D =]-\sqrt{e}, \sqrt{e}[$.

5. $\sum_{n\geq 0} n!x^n$.

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty.$$

Donc $R = 0$ et $D = \{0\}$.

6. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \leq n^n$ donc $\ln(n!) \leq n\ln(n) \leq n^2$, ainsi pour $n > 2$ on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{\ln(n!)} \leq 1$.

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n!)}} \leq 1$$

et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln(n!)}} = 1$ et par suite $R = 1$.

• Si $|x| < 1$ la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n$ converge absolument.

• Si $|x| > 1$ la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n$ diverge.

• Si $|x| = 1$, i.e. $x = \pm 1$.

• Si $x = 1$ alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$ est une série numérique divergente (car $\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln(n)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est une série de Bertrand divergente).

• Si $x = -1$ alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)} x^n = \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ est une série numérique alternée convergente (critère de Leibniz).

Ainsi le domaine de convergence est $D = [-1, 1[$.

7. $\sum_{n\geq 0} n!x^{n^2}$.

Posons $U_n(x) = n!x^{n^2}$ et appliquons la règle de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{(n+1)^2}}{n!x^{n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty} (n+1)x^{2n+1}$$

• Si $|x| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = 0 < 1$ et la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n!x^{n^2}$ converge absolument.

• Si $|x| > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = +\infty > 1$ et la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n!x^{n^2}$ diverge.

• Si $|x| = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|U_n(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty \neq 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) \neq 0$ et la série diverge.

Ainsi $R = 1$ et le domaine de convergence est $D =]-1, 1[$.

8. $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{x^n}{(2n)!}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Donc $R = +\infty$ et $D = \mathbb{R}$.

Exercice 4.2. Trouver le rayon de convergence R, calculer la somme pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$, **2.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{4n^2-1}$, **3.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n$,

4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2n+1}{2n-1}x^{n-1}$, **5.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(2n)!}$, **6.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n$.

Solution

Trouver le rayon de convergence R calculer la somme pour tout nombre réel x tel que $|x| < R$ et étudier ce qui se passe si $|x| = R$ pour les séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2} = 1$$

Ainsi $R = 1$ et

• Si $|x| < 1$ la série entière $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ converge absolument.

• Si $|x| > 1$ la série entière $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ diverge.

• Si $|x| = 1$, alors $\sum\limits_{n\geq 1}\left|\dfrac{x^n}{n(n+1)}\right| = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente.

Le domaine de convergence de la série entière est $D = [-1, 1]$.

La somme :

Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x \right) \\ &= -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \big(\ln(1-x) - x \big) \\ &= \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x}. \end{aligned}$$

De plus $f(0) = 0$, et par le théorème d'Abel on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1. \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} &= \lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 - 2\ln(2). \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} x^{2n}$,

Posons $U_n(x) = \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{4(n+1)^2-1} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1} x^2 \right| = x^2.$$

- Si $x^2 < 1 \iff |x| < 1$ alors la série entière converge absolument.
- Si $x^2 > 1 \iff |x| > 1$ alors la série entière diverge.
- Si $|x| = 1$, alors $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ est convergente (théorème de Leibniz).

Ainsi $R = 1$ et le domaine de convergence de la série entière est $D = [-1, 1]$.

La somme :
Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1} x^{2m+2} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + x\arctan(x) - \frac{1}{x}\arctan(x)\right). \end{aligned}$$

De plus $f(0) = 0$, et par le théorème d'Abel on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \lim_{|x|\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

3. $\sum_{n\geq 0} nx^n$, $R = 1$ et $D =]-1, 1[$.

La somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

4. $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1}$.

$$a_n = \frac{2n+1}{2n-1} \sim 1,$$

ainsi $R = 1$ et

- Si $|x| < 1$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1}$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1}$ diverge.
- Si $|x| = 1$, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{2n-1}$ est divergente ($\frac{2n+1}{2n-1} \to 1 \neq 0$).

Le domaine de convergence de la série entière est $D =]-1, 1[$.

La somme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{n} \\ &= \frac{1}{1-x} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{n}. \end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} &= \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) \\ \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} dt &= \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Si $0 < x < 1$ alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Si $-1 < x < 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{-x}} \arctan(\sqrt{-x})$$

De plus $f(0) = 3$.

5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$, $R = +\infty$ et $D = \mathbb{R}$.

La somme :

Si $x > 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \cosh(\sqrt{x}) - 1$$

Si $x < 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x}) - 1$$

6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1} x^n$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = 1$$

Ainsi $R = 1$ et

- Si $|x| < 1$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$, converge absolument.
- Si $|x| > 1$ la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$, diverge.
- Si $|x| = 1$, alors $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{n}{n+1} x^n\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$ est grossièrement divergente.

Le domaine de convergence de la série entière est $D =]-1, 1[$.

La somme :

Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x). \end{aligned}$$

De plus $f(0) = 0$.

Exercice 4.3. Développer en série entière au voisinage de 0, les fonctions suivantes en précisant le domaine de convergence.

1. $(2x+3)^{-2}$,
2. $\frac{1}{-x^2+x+2}$,
3. $(x+1)\ln(x+1)$,
4. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,
5. $\sqrt{2-x}$,
6. $\arcsin(x)$.

Solution

1. $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x+3} &= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}x+1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}x\right)^n \\
\left(\frac{1}{2x+3}\right)' &= \left(\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n\right)' \\
\frac{-2}{(2x+3)^2} &= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n n x^{n-1} \\
\Rightarrow \frac{1}{(2x+3)^2} &= -\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{n-1}, \quad \forall x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[.
\end{aligned}$$

2. $f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2}$,
On peut voir facilement que

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{-x^2+x+2} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n\right], \quad \forall x \in]-1, 1[.
\end{aligned}$$

3. $f(x) = (x+1)\ln(1+x)$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-2}\frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}, \quad \forall x \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

4. $f(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}+1\right)\frac{x^n}{n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x\in]-1,1[. \end{aligned}$$

5. $f(x)=\sqrt{2-x}$,

$$f(x) = \sqrt{2-x}=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}$$

On sait que

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad \forall x\in]-1,1[.$$

Ainsi

$$(1-\frac{x}{2})^{\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{2}\right)^n, \quad \forall x\in]-2,2[.$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{2}\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1.3....(2n-3)}{2^n n!}x^n\right), \quad \forall x\in]-2,2[.$$

6. $f(x)=\arcsin(x)$,
On sait que

$$\arcsin(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}t^{2n}, \quad \forall t\in]-1,1[.$$

donc

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&= \int_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}t^{2n}\right)dt \\
&= x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1.3...(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}, \quad \forall x\in]-1,1[.
\end{aligned}$$

Exercice 4.4. Chercher la série entière solution de l'équation différentielle

$$y''+xy'+y=0, \tag{E1}$$

vérifiant les conditions $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

Solution

Posons $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$

on a donc $y'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $y''=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$.

En remplaçant dans l'equation (E1) on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
&\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
&\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n\right]x^n=0\\
&\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)a_n=0, \quad \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow (n+2)a_{n+2}+a_n=0, \quad \forall n\in\mathbb{N}\\
&\Rightarrow a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
y(0)=1 &\Rightarrow a_0=1,\\
y'(0)=0 &\Rightarrow a_1=0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2}a_0 = -\frac{1}{2}, \\ a_3 &= -\frac{1}{3}a_1 = 0, \\ a_4 &= -\frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}, \\ a_5 &= -\frac{1}{5}a_3 = 0, \\ a_6 &= -\frac{1}{6}a_4 = -\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ a_{2n} &= (-1)^n \frac{1}{2n}\frac{1}{2n-2}\cdots\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = (-1)^n \frac{1}{2^n n!}. \end{aligned}$$

Alors

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La série obtenue est de rayon de convergence infini.

Exercice 4.5. Chercher la série entière solution de l'équation différentielle

$$xy'' + xy' - y = 0, \tag{E2}$$

vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.

Solution

Posons $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on a donc $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$ et $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$.
En remplaçant dans l'equation (E2) on obtient

$$\begin{aligned} &x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)n a_{n+1} + (n-1)a_n\right] x^n = 0 \\ &\Rightarrow n(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n(n+1)a_{n+1} = -(n-1)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

De plus on a

$$y(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$
$$y'(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2a_2 &= -0a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 0, \\ 2.3a_3 &= -a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 0, \\ &\vdots \\ &\Rightarrow a_n = 0, \quad \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Alors $y = 2x$.

Exercice 4.6. En utilisant les séries entières, calculer la somme des séries numériques suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, **2.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, **3.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)2^{-n}$.

Solution

En utilisant les séries entières, calculer la somme des séries numériques suivantes :

1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

cette série est une série alternée convergente (d'après le critère de Leibniz : $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant). Donc d'aprés le théorème d'Abel on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right) = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2.$$

2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

est une série alternée convergente (d'après le critère de Leibniz :$\frac{1}{2n+1}$ tend vers 0 en décroissant). Donc d'aprés le théorème d'Abel on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right) = \lim_{x \to 1^-} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

3.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)2^{-n},$$

Posons $U_n = (n+1)2^{-n}$ et appliquons la règle de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)2^{-n-1}}{(n+1)2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

donc la série converge.

De plus on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty}nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty}x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty}x^n - 1\\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - 1.\end{aligned}$$

D'aprés le théorème d'Abel on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)2^{-n} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} - 1\right) = 3.$$

4.6 Exercices supplémentaires

Exercice 4.7. Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes

$$1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}x^n,\qquad 2)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!}x^{3n},\qquad 3)\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n})x^n$$

$$4)\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n)x^n\qquad 5)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}x^n\qquad 6)\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n^2}x^n.$$

Exercice 4.8. Donner le développement en séries entières en 0 des fonctions suivantes

$$1)f(x) = \ln(x^2-5x+6),\quad 2)f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right);\quad \alpha\in]0,\pi[$$

$$3)f(x) = \frac{1-x^2}{1-2x\cos(t)+x^2}\quad t\in]0,\pi[.$$

<u>Exercice</u> **4.9.** **Soit définie sur $]-1,1[$ par**

$$f(x)=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

1) Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$.
3) Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

Chapitre 5

Séries de Fourier

Sommaire

5.1 Définitions **79**
5.2 Fonctions périodiques **80**
5.3 Convergence d'une série trigonométrique **80**
5.4 Relations entre les coefficients et la somme d'une série trigonométrique **81**
5.5 Série de Fourier **82**
5.6 Egalité de Parseval **84**
5.7 Résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires . . **84**
5.7.1 Équation des cordes vibrantes 84
5.8 Exercices **86**
5.9 Exercices supplémentaires **89**

5.1 Définitions

Définition 5.1. *On appelle série trigonométrique une série de la forme*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \tag{5.1}$$

où les coefficients a_n et b_n, (on posera $b_0 = 0$), sont des nombres complexes, et ω un nombre rèel positif, appelé pulsation.

Remarque 5.1. *On a*

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) &= a_n \left(\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}\right) + b_n \left(\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{C_n} e^{in\omega x} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{C_{-n}} e^{-in\omega x} \\ &= C_n e^{in\omega x} + C_{-n} e^{-in\omega x}. \end{aligned}$$

Donc les séries trigonométriques sont aussi les séries de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}. \tag{5.2}$$

Remarque 5.2. *Posons (si a_n et b_n sont réels)*

$$\sigma_n = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right),$$

$$\sigma_n \cos\varphi_n = a_n,$$

$$\sigma_n \sin\varphi_n = b_n.$$

Donc les séries trigonométriques sont aussi des séries de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n \cos\left(n\omega x - \varphi_n\right). \tag{5.3}$$

Les σ_n sont des nombres réels positifs appelés amplitudes et les φ_n des nombres réels de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, appelés phases.

5.2 Fonctions périodiques

Définition 5.2. *Une fonction $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite périodique s'il existe un nombre T tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x+T) = f(x) \tag{5.4}$$

si la relation (5.4) est vérifie, on a

$$f(x+kT) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad et \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Définition 5.3. *Si $f(x)$ est périodique, on appelle période de $f(x)$ le plus petit nombre $T > 0$ tel que*

$$f(x+T) = f(x).$$

Remarque 5.3. *Si la série trigonométrique (5.1) converge en tout point d'un intervalle $\left[d, d+\frac{2\pi}{\omega}\right]$, elle converge pour toute valeur de x, et sa somme est une fonction périodique $f(x)$ de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.*

En effet,

$$\cos\left[n\omega\left(x+T\right)\right] = \cos\left(n\omega x + 2\pi n\right) = \cos\left(n\omega x\right)$$

$$\sin\left[n\omega\left(x+T\right)\right] = \sin\left(n\omega x + 2\pi n\right) = \sin\left(n\omega x\right),$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est le plus petit nombre positive pour lequel ces deux relations sont vraies quelque soit n.

Remarque 5.4. *Si f est T-périodique et intégrable sur $[0, T]$, alors*

$$\int_d^{d+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad \forall d \in \mathbb{R}.$$

5.3 Convergence d'une série trigonométrique

Théorème 5.1. *Si les séries numériques $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n\geq 1} |b_n|$ sont convergentes alors la série trigonométrique (5.1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ donc absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$. Sa somme $f(x)$ est une fonction continue, de période $\frac{2\pi}{\omega}$.*

Preuve. Cela découle directement de l'inégalité :

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$$

Théorème 5.2. *Si la série des modules $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|$ est convergente, la série trigonométrique (5.2) converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$. Sa somme $f(x)$ est une fonction continue, de période $\frac{2\pi}{\omega}$.*

Exemple 5.1. *La série trigonométrique*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega x).$$

Théorème 5.3. *Si (a_n) et (b_n) sont des suites numériques décroissantes de nombres réels positifs et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (5.1) est convergente pour tout x non multiple de $\frac{2\pi}{\omega}$.*

5.4 Relations entre les coefficients et la somme d'une série trigonométrique

Théorème 5.4. *Soit*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right]$$

la convergence étant supposée uniforme dans tout intervalle. Alors $\forall d \in \mathbb{R}$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(x) \cos(n\omega x)\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(x) \sin(n\omega x)\, dx$$

Remarque 5.5. *Soit*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}$$

la convergence étant supposée uniforme dans tout intervalle. Alors

$$C_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(x)\, e^{-in\omega x} dx, \qquad d \in \mathbb{R}.$$

5.5 Série de Fourier

Définition 5.4. *Soit f une fonction complèxe, définie sur $\mathbb{R}$, de période T, continue par morceaux sur tout intervalle borné. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \tag{5.5}$$

dont les coefficients appelés coefficients de Fourier de f, sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(x)\cos(n\omega x)dx, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- La série de Fourier peut s'écrire aussi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}, \tag{5.6}$$

avec

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-in\omega x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 5.6.
1. *Si f est paire alors $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*
2. *Si f est impaire alors $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Définition 5.5. *Une fonction $f : [a, b]$ est dite de classe C^1 par morceau sur un intervalle $[a, b]$ s'il existe un nombre fini de points de subdivision $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ tels que la fonction f soit de classe C^1 dans chaque intervalle ouvert $]t_i, t_{i+1}[$ et que de plus $f(t)$ et $f'(t)$ possèdent des limites à gauche et à droite lorsque t tend vers l'un des points de subdivision.*

Question : La série (5.5) converge-t-elle ?

Théorème 5.5 (Théorème de Dirichlet)**.** *Si f est une fonction périodique, de période T, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier associée à la fonction f est convergente pour toute valeur $x_0 \in \mathbb{R}$ et a pour somme*

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0+) + f(x_0-)\right]$$

sachant que $f(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ et $f(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.
En particulier, si f est continue en x_0, la série de Fourier converge en x_0 et a pour somme $f(x_0)$.

Exemple 5.2 (Recherche d'une serie de Fourier)**.** *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ -\frac{\pi}{4} & x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$$

f *est une fonction paire donc* $b_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{\pi}{4}dx = 0.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{4}\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\frac{\pi}{4}\cos(nx)dx \\ &= \begin{cases} 0 & si\ n = 2k \\ \frac{(-1)^k}{2k+1} & si\ n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) \quad pour\ tout\ x,$$

d'après le théorème de Dirichlet on a

$$f(x) = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + ... + (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} + ...$$

En particulier, pour $x = 0$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

Exemple 5.3. *Soit la fonction* $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, *de période* 2π.

f est une fonction impaire donc $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

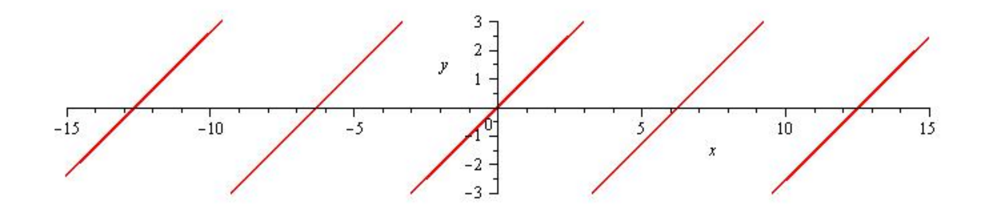
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\cos(nx)|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right] \\ &= \frac{1}{n}\cos(n\pi) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

La fonction f est de classe C^1 par morceau, donc d'après le théorème de Dirichlet

$$\frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

Si $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$.

Si $x = (2k+1)\pi$, *on a* $f(x+0) = -\pi$ *et* $f(x-0) = \pi$ *et la série de Fourier est nulle.*



5.6 Egalité de Parseval

Théorème 5.6. *Soit $f(x)$ la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente, de période T. Alors $f(x)$ est de carrée sommable sur tout intervalle Δ de longueur T et les coefficients de Fourier de $f(x)$ vérifient l'égalité dite de Parseval :*

$$\frac{2}{T}\int_{\Delta}|f(x)|^2\,dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2),$$

ou encore

$$\frac{1}{T}\int_{\Delta}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|C_n|^2.$$

Théorème 5.7. *Si la fonction périodique $f(x)$ est continue et si elle admet une dérivée $f'(x)$ continue par morceaux, alors la série de Fourier de $f(x)$ converge uniformément vers $f(x)$.*

Théorème 5.8. *Soit f une fonction continue par morceaux. La série obtenue en integrant terme à terme, sa série de Fourier converge uniformément vers une primitive de $f(x)$.*

5.7 Résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires

Nous nous proposons de résoudre certaines équations aux dérivées partielles de la forme

$$C^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \qquad \text{(Equation de la corde vibrante),}$$

où de la forme

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \begin{array}{c}\text{(Equation de la chaleur,}\\ k=1 \text{ equation de Schrödinguer).}\end{array}$$

La solution $u(x,t)$ recherchée doit être définie pour $x \in [0,T]$ et $t \geq 0$, et admettre, en tout point du domaine du plan (x,t) des dérivées jusqu'à l'ordre deux.

5.7.1 Équation des cordes vibrantes

Soit

$$\begin{cases} C^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ u_0(x) = u(x,0), \qquad v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\big|_{t=0} \\ u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0 \qquad \text{(corde fixée aux extrimités).} \end{cases}$$

On cherche donc $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(t)\cos(n\omega x) + b_n(t)\sin(n\omega x)\right],$$

alors

$$u(0,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) = 0,$$

$$u(L,t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(t)\cos(n\omega L) + b_n(t)\sin(n\omega L)\right] = 0,$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)\left[\cos(n\omega x) - 1\right] + b_n(t)\sin(n\omega x),$$

des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont :

$$a_0(t) = a_n(t) = 0, \quad \omega L = \pi,$$

on cherche donc un développement de $u(x,t)$ de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{\pi}{L}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(t)\sin(n\omega x),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n''(t)\sin(n\omega x),$$

alors

$$b_n''(t) + C^2\omega^2 n^2 b_n(t) = 0,$$

$$b_n(t) = \alpha_n \cos(n\omega C t) + \beta_n \sin(n\omega C t),$$

$$u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin(n\omega x), \quad x \in [0, L],$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n n\omega C \sin(n\omega x) \quad x \in [0, L],$$

$$\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

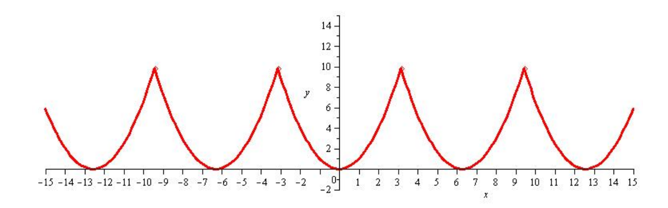
$$\beta_n = \frac{2}{n\pi C}\int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

5.8 Exercices

Exercice 5.1. Soit f une fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Écrire le développement en série de Fourier de f.
4. En déduire la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Solution

1. Le graphe de f.



2. La fonction f est paire donc $b_n = 0, \forall n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = 2\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

3. Le développement en série de Fourier de f.

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

4. S'il on fait $x = \pi$ on obtient

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Maintenant, en appliquant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx &= \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} \\ \Rightarrow \quad \frac{\pi^4}{5} &= \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

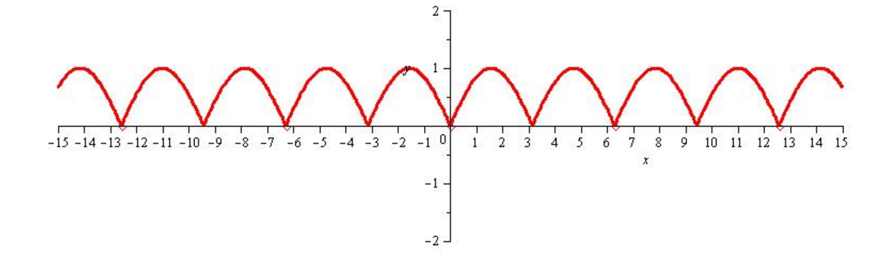
Ceci implique que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 5.2. Soit f une fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\sin(x)|, -\pi \leq x \leq \pi$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Écrire le développement en série de Fourier de f.

Solution

1. Le graphe de f.



2. Les coefficients de Fourier de f.
Comme la fonction f est paire alors $b_n = 0, \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)dx = 2\frac{2}{\pi}\left[-\sin(x)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(x)|\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2(x)}{2}\right]_0^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

On sait que pour $n \geq 2$,

$$\sin(x)\cos(nx) = \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{2},$$

ainsi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1} & \text{si } n = 2k, \\ 0 & \text{si } n = 2k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Le développement en série de Fourier de f est

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

4. On a

$$0 = S(0) = \frac{2}{\pi} + \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1},$$

ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

5. En utilisant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \\ \Rightarrow \quad & 1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

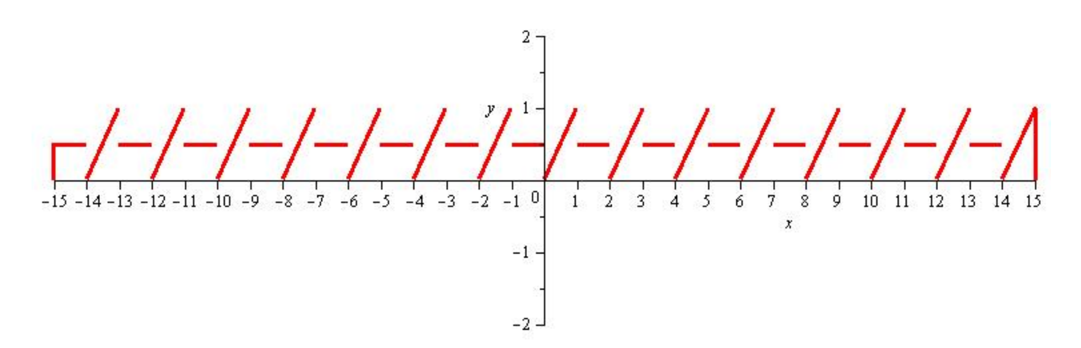
Exercice 5.3. Soit f une fonction périodique de période 2 définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Donner le développement en série de Fourier de f.

Solution

1. Le graphe de f.



2. La fonction f n'est ni paire ni impaire et ne possède des points de discontinuités que pour les points d'abscisses $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ ce qui implique $\omega = \pi$ ainsi

$$\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^2 f(x)dxdx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{dx}{2} = 1, \\
a_n &= \int_0^2 f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_0^1 x\cos(n\pi x)dx + \int_1^2 \frac{\cos(n\pi x)dx}{2} \\
&= \left[x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}dx + \left[\frac{\sin(n\pi x)}{2n\pi}\right]_1^2 = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}, \\
b_n &= \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_0^1 x\sin(n\pi x)dx + \int_1^2 \frac{\sin(n\pi x)dx}{2} \\
&= \left[-x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx - \left[\frac{\cos(n\pi x)}{2n\pi}\right]_1^2 = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2\pi n}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donc

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n}.$$

5.9 Exercices supplémentaires

Exercice 5.4. Tracer les graphes des fonctions $p-$périodiques suivantes et trouver leurs séries de Fourier correspondantes :

$$\left.\begin{array}{ll} a) & f(x)=x^2,\quad x\in[0,2\pi[\,. \\ b) & f(x)=x^2,\quad x\in[0,\pi[\ \text{ et paire.} \\ c) & f(x)=x^2,\quad x\in[0,\pi[\ \text{ et impaire.} \end{array}\right\},\quad p=2\pi.$$

$d)\quad f(x)=\pi e^{ax},\quad x\in[0,2\pi[\,,\ p=2\pi.$

$e)\quad f(x)=1,\quad x\in[0,2[\ $ et impaire, $\ p=4.$

$f)\quad f(x)=|x|\,,\quad x\in[-4,4[\,,\ p=8.$

Exercice 5.5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, telle que : $f(t)=t$, t dans $[0,\pi]$.

1. Développer cette fonction en série de Fourier.
2. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 5.6. Soit f la fonction impaire, $2\pi-$périodique telle que

$$\forall x\in[0,\pi]\qquad f(x)=x(\pi-x)\,.$$

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la somme

$$\sigma=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

(justifier).

Exercice 5.7. 1. Développer en série de Fourier de période p les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rlll} a) & f(x) &=& 1-x,\quad x\in\,]0,1[\,,\quad p=3. \\ b) & f(x) &=& \cos x,\quad 0<x<\pi,\quad p=\pi. \\ c) & f(x) &=& 1\,,\quad x\in\,]-1,1[\,,\quad p=2\pi. \end{array}$$

2. Développer en séries de Fourier sinus les fonctions

$$\begin{array}{rlll} a) & f(x) &=& \cos x,\quad 0<x<\pi. \\ b) & f(x) &=& 1,\quad 0<x<2. \\ c) & f(x) &=& e^x,\quad 0<x<\pi. \end{array}$$

3. Développer en séries de Fourier cosinus les fonctions

$$\begin{aligned} a)\ f(x) &= x, \quad 0 < x < \pi. \\ b)\ f(x) &= \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \\ c)\ f(x) &= a, \quad x \in]0,1[\,,\ a > 0. \end{aligned}$$

Exercice 5.8. **Soient f et g deux fonctons périodiques de période 2π et h la fonction définie par**

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, g(x-t)\, dt.$$

1. Montrer que h est une fonction périodique de période 2π.

2. Montrer que si $c_n(f)$ [resp. $c_n(g)$], n appartenant à $\mathbb{Z}$, sont les coefficients de Fourier de la fonction f (resp. g), alors les coefficients de Fourier $c_n(h)$ de la fonction h vérifient l'égalité

$$c_n(h) = c_n(f) . c_n(g) .$$

Exercice 5.9. **Soit la fonction périodique de période 2π définie dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ par**

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}.$$

1. Déterminer la série de Fourier de f et montrer que cette série est uniformément convergente dans $\mathbb{R}$. Quelle est la somme de la série

$$S = 1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n^2} + ...?$$

2. Soit

$$L(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\, dx, \qquad \text{où } p > 0.$$

Montrer que

$$L(p) = \frac{1}{1 - e^{2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-px} f(x)\, dx$$

et calculer $L(p)$.

3. En utilisant le développement en série de Fourier de f, montrer que

$$L(p) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + p^2}\right).$$

Exercice 5.10. Soient α un nombre réel tel que α n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$ et f la fonction périodique de période 2π égale à $\cos \alpha x$ pour x appartenant à $[-\pi, \pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. En déduire la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

3. Montrer que la série de Fourier de f est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ et de somme f.
4. Montrer que

$$\frac{\pi}{\alpha \sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

5. Utiliser ce résultat pour démontrer que, si $0 < \alpha < 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} + x^{-\alpha}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

(On utilisera le développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$ en justifiant la méthode.)

Exercice 5.11. Soient α un nombre réel tel que α n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$ et f la fonction périodique de période 2π égale à $\cos \alpha t$ pour t appartenant à $[-\pi, \pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier.
3. En déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \cot x,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1} x}{\pi^2 n^2 - x^2} = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}.$$

4. En utilisant la première identité, montrer que

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

5. Vérifier que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi).$$

$\Big($ Utiliser la formule $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}\Big)$.

Chapitre 6

Examens

Sommaire

6.1 Examen 2008 93
6.2 Examen de rattrapage 2008 97
6.3 Examen de rattrapage 2009 101
6.4 Examen 2010 104
6.5 Examen de rattrapage 2010 108
6.6 Examen 2011 112
6.7 Examen de rattrapage 2011 116
6.8 Examen 2012 119
6.9 Examen de rattrapage 2012 122
6.10 Examen 2013 125
6.11 Examen de rattrapage 2013 129
6.12 Examen 2014 132
6.13 Examen de rattrapage 2014 137
6.14 Examen GBM 2012 140

6.1 Examen 2008

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2007-2008

Examen final.

Exercice 1(4 Pts)

Soit $U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs α on a convergence absolue de la série de terme général U_n.

2. Montrer que $\sum\limits_{n \geq 1} U_n$ converge pour $\alpha > 0$.

Exercice 2(8 Pts)

Considérons la fonction f, 2π-périodique définie par

$$f(x) = |\sin x|, \text{ pour } x \in [-\pi, \pi].$$

1. Tracer la courbe représentative de f.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
(On rappelle que : $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$).

3. En déduire la série de Fourier de f.

4. En déduire la somme de la série suivante : $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{4n^2 - 1}$.

5. En utilisant l'égalité de Parseval calculer la somme de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Exercice 3(4 Pts)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \begin{cases} y' = xy - 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On cherche la solution de (E) sous la forme $y(x) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer a_0 et a_1.

2. Trouver une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n pour $n \geq 0$.

3. Calculer a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ,a_7 et trouver l'expression générale de a_n.

Exercice 4(4 Pts)

Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 + x + 1$.

1. Trouver a, b et c tel que : $P(x) = ax(x-1) + bx + c$.

2. Considérons la série entière $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{2n^2 + n + 1}{n!} x^n$.

   a) Calculer son rayon de convergence.

   b) En utilisant la question 1. calculer sa somme $S(x)$.

S o l u t i o n

Exercice 1(4 Pts)

Soit $U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
1.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

pour $\alpha > 1$ la série converge absolument.

2. Soit $\alpha > 0$.

Si $\alpha > 1$, la série converge absolument donc converge.

Si $0 < \alpha < 1$, la série ne converge pas absolument, mais en appliquant le critère de Leibniz ($\frac{1}{n^\alpha}$ décroit vers 0) la série converge. Nous concluons que la série converge pour $\alpha > 0$.

Exercice 2(8 Pts)

Voir la solution de l'exercice 5.2 page 87.

Exercice 3(4 Pts)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E)\begin{cases} y' = xy - 1 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Puisque $y(0) = 1$ alors $a_0 = 1$.

$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1 = 0$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1 = 0$$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1 = 0$$

$$a_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2) a_{n+2} - a_n\right] x^{n+1} = -1$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -1, \quad \text{et } (n+2) a_{n+2} = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. D'après l'equation précédente, on a

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Calculer a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ,a_7 et trouver l'expression générale de a_n.

$$a_2 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{4.2}, \quad a_5 = \frac{a_3}{5} = -\frac{1}{5.3},$$
$$a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{1}{6.4.2}, \quad a_7 = \frac{a_5}{7} = -\frac{1}{7.5.3}.$$

Ainsi l'expression générale dépend de n :
Si n est pair alors $a_{2k} = \frac{1}{2^k k!}$.
Si n est pair alors $a_{2k+1} = -\frac{2^k k!}{(2k+1)!}$.

Exercice 4(4 Pts)

Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 + x + 1$.
1. $P(x) = ax(x-1) + bx + c = ax^2 + (b-a)x + c$. Ceci implique que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 1$.
2. Soit la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{2n^2+n+1}{n!} x^n$.
Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2(n+1)^2+n+2}{(n+1)!} \frac{n!}{2n^2+n+1} \right| = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

La somme de la série

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n-1)+3n+1}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(n-1)}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 2x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + 3x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 2x^2 e^x + 3x e^x + e^x \\
&= (2x^2 + 3x + 1)e^x.
\end{aligned}$$

6.2 Examen de rattrapage 2008

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2007-2008

Niveau : ST/L2/S1
UEF3/Math3

Examen de rattrapage.

Exercice 1(7 Pts)
Soit la série de terme général

$$u_n = \arctan \frac{1}{1+n(n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$.
2. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$.
4. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 2(7 Pts)

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. En déduire la série de Fourier de f.
4. En déduire la relation de Parseval.

Exercice 3(6 Pts)

1. Soit $g(x) = x^2 + 2x\cos\theta + 1$.
   a) Montrer que $g(x) = (xe^{i\theta}+1)(xe^{-i\theta}+1)$.
   b) Soit $f(x) = \log(x^2 + 2x\cos\theta + 1)$, en déduire que

$$f(x) = \log(xe^{i\theta}+1) + \log(xe^{-i\theta}+1).$$

2. Soit $F(X) = \log(1+X)$.
   a) Développer $F(X)$ en série entière au voisinage de 0.

b) En déduire le développement de $f(X)$ en série entière par rapport à X au voisinage de 0.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue.

3. Soit $f(X) = 2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}\cos n\theta$.

Déterminer les coefficients de la série de Fourier par rapport à θ.

Solution

Exercice 1(7 Pts)

Soit la série de terme général

$$u_n = \arctan\frac{1}{1+n(n+1)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$.

On sait que

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}.$$

Posons $a = \arctan(n+1)$ et $b = \arctan(n)$ alors on a

$$\tan\left(\arctan(n+1) - \arctan(n)\right) = \frac{n+1-n}{1+n(n+1)}$$

Ce qui implique que

$$\arctan(n+1) - \arctan(n) = \arctan\frac{1}{1+n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= (\arctan(2) - \arctan(1)) + (\arctan(3) - \arctan(2)) + \\ &\quad \ldots + (\arctan(n+1) - \arctan(n)) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(1) = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

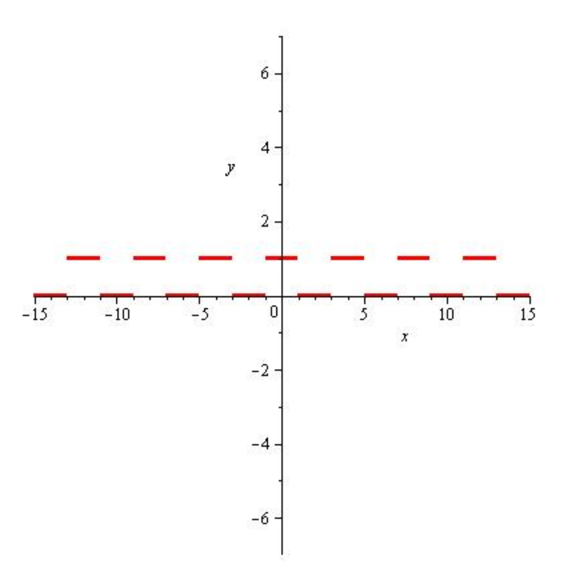
3. $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} = \left(\arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

4. Puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$ alors la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Exercice 2(7 Pts)

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$



1. La courbe représentative de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
Puisque f est paire alors on a $b_n = 0, \quad \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 dx = 1, \\ a_n &= \int_0^2 f(x)\cos(\frac{n\pi}{2}x)dx = \int_0^1 \cos(\frac{n\pi}{2}x)dx = \left[\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}x)\right]_0^1 \\ &= \begin{cases} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2k+1, \\ 0 & \text{si } n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

3. La série de Fourier de f est donc

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right).$$

4. La relation de Parseval est donnée par

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n^2 + b_n^2] = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |f(x)|^2\, dx,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} = 1.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 3(6 Pts)

1. Soit $g(x) = x^2 + 2x\cos\theta + 1$.
a) On sait que $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, ainsi

$$\begin{aligned} x^2 + 2x\cos\theta + 1 &= x^2 + 2x\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) + 1 \\ &= x^2 + xe^{i\theta} + xe^{-i\theta} + 1 = (xe^{i\theta}+1)(xe^{-i\theta}+1). \end{aligned}$$

b) Soit

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + 2x\cos\theta + 1) \\ &= \ln((xe^{i\theta}+1)(xe^{-i\theta}+1)) = \ln(xe^{i\theta}+1) + \ln(xe^{-i\theta}+1). \end{aligned}$$

2. Soit $F(X) = \log(1+X)$.
a) On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1+X} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n X^n \\ \Rightarrow\ &\int_0^X \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^X t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{X^{n+1}}{n+1} \\ \Rightarrow\ &\ln(1+X) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{X^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{X^n}{n}, \quad \forall X \in]-1,1[. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(xe^{i\theta}+1) + \ln(xe^{-i\theta}+1) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n e^{in\theta}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n e^{-in\theta}}{n} \\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\cos(n\theta). \end{aligned}$$

c) Le rayon de convergence de la série obtenue est $R = 1$.
3. Soit $f(X) = 2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\cos n\theta$.
Les coefficients de la série de Fourier de f sont

$$a_0 = 0, \quad a_n = 2(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}, \quad b_n = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

6.3 Examen de rattrapage 2009

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2008-2009

Niveau : ST/L2/S1
UEF3/Math3

Examen de rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)
Soit la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n(n+2)} x^n.$$

1) Calculer le rayon de convergence R.

2) Présicez la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$ et en déduire le domaine de convergence de la série.

Exercice 2(8Pts)

1) Développer la fonction $g(x) = \ln(x+1)$ en série entière au voisinage de 0.

2) En déduire le développement en série entière de la fonction $f(x) = x\ln(x+1)$ en précisant le rayon de convergence.

3) Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme de la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 3(6 Pts)

Étudier la convergence des séries numériques suivantes

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{2}}$

Solution

Exercice 1(6 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}.\frac{n(n+2)}{2^n}\right| = 2 = \frac{1}{R}$$

Ainsi, $R = \frac{1}{2}$.

2) Pour $x = +\frac{1}{2}$, on a la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

On remarque que $\frac{1}{n(n+2)} \sim \frac{1}{n^2}$ or $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann qui converge.

Par le critère d'équivalence, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ converge.

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$.

On remarque que

a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+2)} = 0$.

b) La suite $\frac{1}{n(n+1)}$ est décroissante.

En appliquant le critère de Leibniz, nous concluons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ converge .

Ainsi, le domaine de convergence est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Exercice 2(8 Pts)

1) On a tout d'abord pour $|x| < 1$ que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n.$$

En intégrant terme à terme, on a

$$\int \frac{dx}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int x^n dx.$$

Ainsi,

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2) On a

$$f(x) = x\ln(x+1),$$

$$f(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+1},$$

avec un rayon de convergence $R = 1$.

3) On a

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

D'autre part, on sait que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^{n+1}, \qquad \text{pour} \quad |x| < 1$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}x^n.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, nous remarquons que

$$f'(\frac{1}{2}) = -\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(\frac{n+1}{n})(\frac{1}{2})^n,$$

$$= -\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n(\frac{n+1}{n}) = \ln\left(\frac{1}{2}+1\right) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\left(\ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{3}\right).$$

Exercice 3(6 Pts)

1) On remarque que $\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n}$ qui est une série harmonique qui diverge, ainsi par le critère d'équivalence, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}$ diverge.

2)On remarque que

$$a) \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+\sqrt{2}} = 0 \quad \text{et} \quad b)\frac{1}{n^2+\sqrt{2}} \quad \text{est décroisante.}$$

Ainsi, par le critère de Leibniz, la série converge.

6.4 Examen 2010

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2009-2010

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)

Soit
$$u_n = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. Écrire u_n sous la forme
$$u_n = \frac{a}{n - \frac{1}{2}} + \frac{b}{n + \frac{1}{2}} \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

3. Calculer $u_1 + u_2 + u_3$ et en déduire
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n.$$

4. Calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$.

Exercice 2(7 Pts)

Soit la série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

1. Calculer le rayon de convergence R.

2. Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$, et en déduire le domaine de convergence de cette série.

3. Calculer la somme de la série entière.

Exercice 3(7 Pts)

1. Développer la fonction $g(x) = \arctan(x)$ en série entière au voisinage de 0.

2. En déduire le développement en série entière de la fonction $f(x) = xg(x)$ en précisant le rayon de convergence R.

3. Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{4^n(2n+1)}.$$

Solution

Exercice 1(6 Pts)

1) On remarque que

$$\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} \sim \frac{1}{n^2}.$$

qui est le terme général d'une série numérique qui converge, ainsi, par le critère d'équivalence, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ converge.

2) On peut écrire u_n sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} &= \frac{a}{n-\frac{1}{2}} + \frac{b}{n+\frac{1}{2}},\\ &= \frac{(a+b)n+\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}{n^2-\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

ceci implique que

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a}{2}-\frac{b}{2}=1 \end{cases}$$

ainsi,

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

3) Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2-\frac{2}{3},\\ u_2 &= \frac{1}{2-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}-\frac{2}{5},\\ u_3 &= \frac{1}{3-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}-\frac{2}{7}, \end{aligned}$$

ce qui donne que

$$u_1+u_2+u_3 = 2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7} = 2-\frac{2}{7},$$

Ainsi, nous avons

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = 2 - \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

4)Nous remarquons que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

Puisque,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) = 2,$$

nous concluons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = 2,$$

<u>Exercice 2</u>(7 Pts)

1) Nous appliquons le critère d'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{(n+2)} . \frac{(n+1)}{x^{2n}} \right| = x^2.$$

Ainsi, Si $x^2 < 1$ qui implique que $|x| < 1$, la série entière converge.
Si $x^2 > 1$ qui implique que $|x| > 1$, la série entière. diverge.
Ce qui donne que le rayon de convergence est $R = 1$.

2) Pour $x = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

qui est la série harmonique qui diverge, ainsi pour $x = 1$, la série diverge.
Pour $x = -1$, on a la même série.
Ceci conclut que le domaine de convergence est

$$D =]-1, 1[.$$

3)Pour $x = 0$, la somme vaut 0.
Si $x \in]-1, 1[\backslash 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{x^2}\ln(1-x^2).$$

Exercice 3(7 Pts)

1) On a tout d'abord pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n,$$

ceci implique que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n},$$

et en intégrant terme à terme, on a

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Ceci donne que

$$g(x) = \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2) On a :

$$f(x) = xg(x),$$
$$= x\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1},$$

avec un rayon de convergence $R = 1$.

3) On a

$$f'(x) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2}.$$

D'autre part, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, nous remarquons que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(2n+2)\frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{4^n(2n+1)},$$
$$= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{1}{2})^2}.$$

6.5 Examen de rattrapage 2010

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2009-2010

Examen de rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la convergence des séries numériques suivantes

$$\bullet \sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \bullet \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}.$$

Exercice 2(7 Pts)

1) Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{n+1}$ et préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$.

2) Calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{n+1}$.

3) En déduire la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)3^n}$.

Exercice 3(7 Pts)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \begin{cases} 4xy'' + 2y' - y = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière, $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, pour $x \geq 0$.

1) Trouver la relation de récurrence liant les coefficients.

2) Trouver la solution y de (E).

Solution

Exercice 1(6 Pts)

On applique le critère de d'Alembert. • $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = (\frac{(n+1)!}{n!})^2\frac{(2n)!}{(2n+2)},$$

et en simplifiant

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = (n+1)^2\frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2},$$

on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{4} < 1.$$

Donc la série converge.

• $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}$ est une série alternée. On remarque que

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}} = 0$

2) La suite $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}$ est décroissante.

En appliquant le critère de Leibniz, on conclut que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}$ converge.

Exercice 2(7 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}.\quad\frac{n+1}{n}\right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Donc $R = 1$

- $x = +R \Rightarrow x = 1$, on a la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+1}$.

On remarque que $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ et donc d'après le critère de divergence, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n}{n+1}$ diverge.

- $x = -R \Rightarrow x = -1$, on a la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n(-1)^n}{n+1}$

On remarque que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(-1)^n}{n+1}$ n'existe pas et donc la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n(-1)^n}{n+1}$ diverge.

2) $\frac{nx^n}{n+1} = (1 - \frac{1}{n+1})x^n$. La somme vaut 0 si $x = 0$.

Si $x \in]-1, 1[\backslash\{0\}$,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{nx^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0}(1 - \frac{1}{n+1})x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} x^n - \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

3) Pour $x = \frac{1}{3}$, on a :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n(\frac{1}{3})^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{(n+1)3^n} = \frac{2}{3} + 3\ln(\frac{3}{2}).$$

<u>Exercice 3</u>(7 Pts)

1) On remarque que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$, or la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann qui converge, et donc par le critère d'équivalence, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

2) On peut écrire le terme général de la série comme :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

$$= \frac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Ceci implique que :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ce qui donne que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}).$$

3)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}).$$

On remarque que

$$\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= \lim_{N\to+\infty}(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1})$$

$$= \lim_{N\to+\infty}(1 - \frac{1}{N+1}) = 1.$$

De la même manière, on calcule $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}$. Ainsi, on conclut que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

6.6 Examen 2011

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2010-2011

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2} \qquad \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}.$$

Exercice 2(6 Pts)
Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2(n-1)}.$$

1) Calculer le rayon de convergence R.
2) Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$.
3) Calculer la somme de $f''(x)$.
4) Étudier la nature des séries $f''(1)$ et $f''(-1)$.

Exercice 3(8 Pts)

Chercher la série entière solution de l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} xy'' + xy' - y = 0 \\ y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Solution

Exercice 1(6 Pts)

1) Nous remarquons que

$$\left|\frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et puisque la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, alors par le critère de comparaison la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2}\right| \qquad \text{converge.}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2} \text{converge absolument.}$$

2) Nous remarquons que la série est alternée qui vérifie les conditions suivantes

$$\bullet \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

$$\bullet \text{ la suite } \quad \frac{1}{e^n} \quad \text{est décroissante}$$

Ainsi, par le critère de Leibniz, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{e^n} \quad \text{converge.}$$

Exercice 2(7 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n(n+1)^2} \cdot \frac{n^2(n-1)}{1}\right| = 1$$

Ainsi, $R = 1$

2) Pour $x = +1$, on a la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Nous remarquons que

$$\frac{1}{n^2(n-1)} \sim \frac{1}{n^3},$$

or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann qui converge et par le critère d'équivalence, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n-1)}$ converge.

Pour $x=-1$, on a la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n-1)}$.
Nous remarquons que
a) la suite $\frac{1}{n^2(n-1)}$ est décroissante.
b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2(n-1)} = 0$
En appliquant le critère de Leibniz, nous concluons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n-1)}$ converge.

3) Nous remarquons que

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n^2(n-1)}$$

et

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n}$$

Ainsi,

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^2}(-\ln(1-x) - x).$$

4) Nous remarquons que

$$f''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

qui est une série harmonique qui diverge.
Pour

$$f''(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

qui est une série alternée qui converge par le crière de Leibniz.

Exercice 3(7 Pts)

On pose $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, ce qui implique que

$$y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Nous remplaçons dans l'équation différentielle pour obtenir

$$x(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}) + x(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}) - (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow (n+1)n a_{n+1} + n a_n - a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{(1-n)}{n(n+1)} a_n, \qquad n \geq 1$$

Pour $n = 0$, on a $y(0) = a_0 = 0$ et d'autre part $y'(0) = a_1 = 2$.

Ainsi, pour

$$n = 1, \qquad a_2 = 0$$

$$n = 2, \qquad a_3 = 0.$$

$$n = 3, \qquad a_4 = 0.$$

Ceci conclue que la solution de l'équation différentielle est

$$y = 2x.$$

6.7 Examen de rattrapage 2011

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2010-2011

Examen rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la convergence des séries numériques suivantes

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \bullet \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} \qquad \bullet \sum_{n=1}^{+\infty} n^n.$$

Exercice 2(7 Pts)

Soit la série entière suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n.$$

1)Calculer le rayon de convergence R.

2)Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$, et en déduire le domaine de convergence de cette série.

3) Calculer la somme de la série entière.

Exercice 3(7 Pts)

Soit la fonction suivante

$$f(x) = \frac{1}{x+3}.$$

1) Développer la fonction f en série entière au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

S o l u t i o n

Exercice 1(6 Pts)

1) On remarque que

$$\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Or $\frac{1}{n^{3/2}}$ est le terme général d'une série de Riemann qui converge puisque l'exposant est supérieur à 1.

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ est une série alternée. Nous remarquons que

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2-1} = 0$
- $\frac{1}{n^2-1}$ est décroissante.

En appliquant le critère de Leibniz, nous concluons que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ converge.

3) On applique le critère de Cauchy, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

Ainsi, la série diverge.

Exercice 2(7 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} . \frac{2^n}{(-1)^n}\right| = \frac{1}{2}$$

Donc $R = 2$

2) Pour $x = +R$, on a la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$.

On remarque que $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \neq 0$, ainsi la série diverge.

Pour $x = -R$, on a la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ qui est une série qui diverge puisque la limite est différente de 0.

Ceci implique que le domaine de convergence est $]-2, +2[$.

3) Pour $x \in]-2, +2[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{-x}{2})^n$$

qui est une série géométrique qui converge de raison $\frac{-x}{2}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{2}{2+x}$$

Exercice 3(7 Pts)

1) On remarque que

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{x}{3}+1}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Cette série converge pour $|\frac{x}{3}| < 1$, ainsi, le rayon de convergence R est 3.

2) La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2}$$

D'autre part,

$$f'(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n\frac{x^{n-1}}{3^n}$$

Remplaçons $x = 2$, on a

$$f'(2) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n\frac{2^{n-1}}{3^n}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n\frac{2^n}{3^n}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n\frac{2^n}{3^n} = 6f'(2)$$

et puisque $f'(2) = \frac{-1}{25}$, nous déduisons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n\frac{2^n}{3^n} = \frac{-6}{25}.$$

6.8 Examen 2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2011-2012

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + n}{5^n} \qquad \bullet \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}.$$

Exercice 2(8 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{2})^n x^n}{n}$$

1) Calculer le rayon de convergence R.
2) Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$.
3) Calculer la somme de $f(x)$.
4) En déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

Exercice 3(6 Pts)
Soit f une fonction 2π-périodique, et telle que

$$f(x) = x - \pi \qquad \text{si} \qquad -\pi \leq x \leq \pi.$$

1) Tracer le graphe de la fonction f sur au moins deux périodes.
2) Calculer les coefficients de Fourier associé à f.
3) Écrire le développement en série de Fourier de f.

Solution

Exercice 1(6 Pts)

1)Nous remarquons que

$$\sum \frac{3^n+n}{5^n} = \sum \frac{3^n}{5^n} + \sum \frac{n}{5^n}$$

et $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^n$ est une série géométrique convergente. Pour la série $\sum \frac{n}{5^n}$, nous appliquons le critère de d'Alembert suivant

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{5^{n+1}}.\frac{5^n}{n} = \frac{1}{5} < 1.$$

Ainsi, la série converge.

2) Nous remarquons ici que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ est une série alternée qui vérifie les conditions suivantes

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$
- $\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ est décroissante.

En appliquant le critère de Leibniz, nous concluons que la série converge.

Exercice 2(8 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-\sqrt{2})^{n+1}}{n+1}.\frac{n}{(-\sqrt{2})^n} \right| = \sqrt{2}$$

Donc $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Pour la série $x = +R$, on a la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Nous remarquons que c'est une série alternée qui vérifie les deux conditions du critère de Leibniz, ainsi la série converge.

Pour $x = -R$, on a la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge.

3) Pour $x \in]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{2})^n x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\sqrt{2}x)^n}{n}$$

$$f(x) = -\ln(1+\sqrt{2}x).$$

4) Nous remarquons que pour $x = \frac{1}{2}$, on a la série

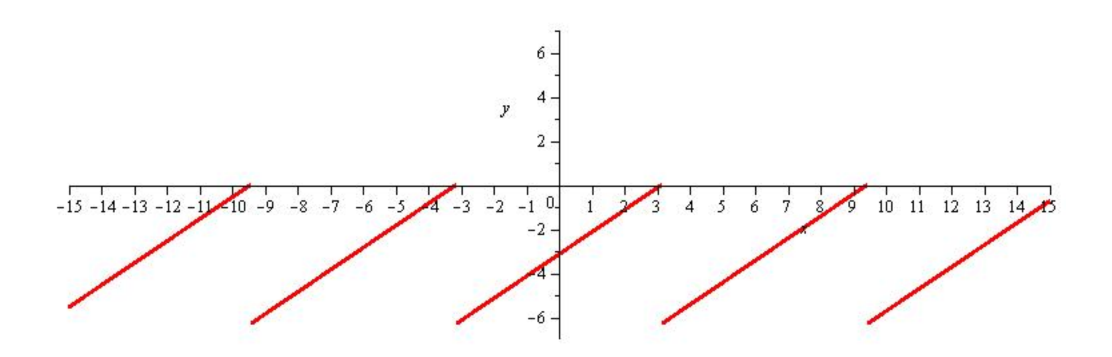
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = f(\frac{1}{2})$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = -\ln \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Exercice 3(6 Pts)

1) Le graphe de la fonction est le suivant



2) Les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x - \pi) dx \\ &= \frac{1}{\pi} [\frac{x^2}{2} - \pi x]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x - \pi) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} [(x - \pi) \frac{\sin(nx)}{n}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx] \\ &= \frac{1}{\pi n^2} [\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-\pi)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[-(x-\pi)\frac{\cos(nx)}{n}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3) La série de Fourier associée à la fonction f est

$$f(x) = -\pi + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

6.9 Examen de rattrapage 2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2011-2012

Examen rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la convergence des séries numériques suivantes

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{3n} \qquad \bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{n!}$$

Exercice 2(6 Pts)
Soit la fonction suivante

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+x)}$$

Développer la fonction f en série entière au voisinage de 0.

Exercice 1(8 Pts)
Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... + nx^n + ... \qquad (1).$$

On se propose de calculer de deux manières différentes la somme de la série entière (1).

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série (1).

2) Montrer que la série (1) peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie des séries géométriques suivantes

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + ... \qquad (2)$$
$$x^2 + x^3 + x^4 + ... \qquad (3)$$
$$x^3 + x^4 + ... \qquad (4)$$
$$x^4 + ... \qquad (5)$$

....

3) Déterminer la somme des séries $(2), (3), (4)$ et (5) et en déduire la somme de la série (1).

4) Calculer la somme de la série entière (1) en appliquant le théorème de dérivation terme à terme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

S o l u t i o n

<u>Exercice 1</u>(6 Pts)

• Nous appliquons le critère de Cauchy, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(3n+1)^3} = \frac{1}{27} < 1.$$

Ainsi, la série converge.

• Nous appliquons le critère de d'Alembert, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1}{(n+1)}.\left(\frac{n+2}{n}\right)^2 = 0 < 1$$

Ainsi, la série converge.

<u>Exercice 2</u>(6 Pts)

Nous remarquons que la série f est la somme d'une série géométrique. Nous avons

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$$

<u>Exercice 3</u>(8 Pts)

1) Le rayon de convergence est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

ainsi, $R = 1$.

2) En faisant la somme des quatre lignes (séries (2), (3),(4) et (5)), on obtient

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ...$$

qui est la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

3) Nous remarquons que les quatres séries (2),(3),(4) et (5) sont des séries géométriques de raison x. Seuls les premiers termes différent. Ainsi,

$$(2) = x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{x}{1-x}$$

$$(3) = x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{x^2}{1-x}$$

$$(4) = x^3 + x^4 + ... = \frac{x^3}{1-x}$$

$$(5) = x^4 + ... = \frac{x^4}{1-x}$$

d'où la somme de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^3}{1-x} + \frac{x^4}{1-x} + ...$$

$$= \frac{x + x^2 + x^3 + ...}{1-x} = \frac{x}{1-x} . \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

4) On sait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, par dérivation terme à terme, nous avons

$$(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n)' = (\frac{1}{1-x})'$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

6.10 Examen 2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2012-2013

Niveau : ST/L2/S1
UEF3/Math3

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)
Étudier la nature des séries numériques suivantes :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2}}{n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$

Exercice 2(8 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{2n}$$

1) Calculer le rayon de convergence R.
2) Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$ et en déduire le domaine de convergence.
3) Calculer la somme de $f(x)$.
4) En déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^n}.$$

Exercice 3(6 Pts)

Soit f une fonction $2\pi-$ périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de la fonction f sur au moins deux périodes.
2) Calculer les coefficients de Fourier associé à f.
3) Écrire le développement en série de Fourier de f.
4) Soit S la série de Fourier associée à f. Calculer $S(\pi)$.

Solution

Exercice 1(6 Pts)
Étudier la nature des séries numériques suivantes :

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n^2}}{n}$$

Nous appliquons le critère de d'Alembert, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-(n+1)^2}}{n+1} \frac{n}{e^{-n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-(2n+1)} \frac{n}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc la série converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$$

On a $\left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, puisque la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^2}$ converge absolument donc elle converge.

Exercice 2(8 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^{2n}$$

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+2)x^{2n+2}}{(n+1)x^{2n}} \right| = x^2$$

Si $x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1$, alors la série converge absolument.
Si $x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1$, alors la série diverge.
Ainsi le rayon de convergence est $R = 1$.

2) Si $x = 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(1)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \neq 0$

Si $x = -1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n+1)$ est divergente.

Donc le domaine de convergence est $]-1,1[$.
3) La somme de la série

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^2)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \\ &= \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^2}. \end{aligned}$$

4) Pour $x = \frac{1}{2}$ on a

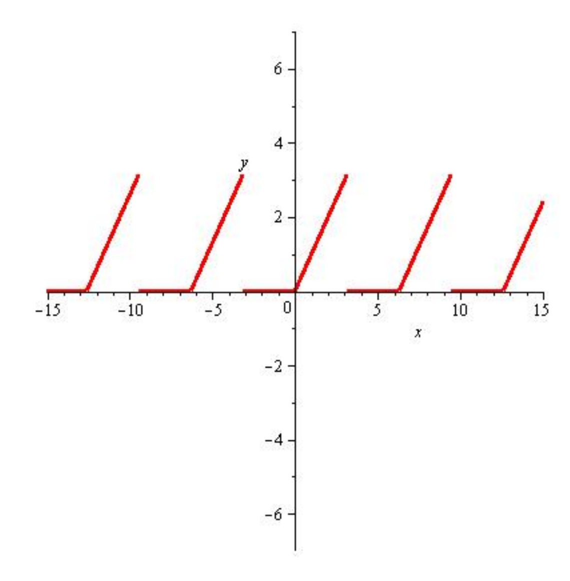
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{16}{9}.$$

<u>Exercice 3</u>(6 Pts)

Soit f une fonction $2\pi-$ périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1) Le graphe de la fonction f :



2) Les coefficients de Fourier associé à f.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\\
&= \frac{-\pi(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

3) Le développement en série de Fourier de f.

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2\pi}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

4) Calculer $S(\pi)$.
Puisque π est un point de discontinuité, alors

$$S(\pi) = \frac{\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) + \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

6.11 Examen de rattrapage 2013

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2012-2013

Niveau : ST/L2/S1
UEF3/Math3

Examen rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)

Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}, \qquad \text{pour} \quad n \geq 3.$$

1. Étudier la nature de la série $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$.

2. Écrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n-2}, \qquad \text{pour} \quad n \geq 3.$$

3. Calculer $u_3 + u_4 + u_5$ et en déduire

$$S_n = u_3 + u_4 + u_5 + ... + u_n.$$

4. Calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}$.

Exercice 2(6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n!}$$

1) Calculer le rayon de convergence R.

2) En calculant la somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$, trouver la somme de la série $f(x)$.

3) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

Exercice 3(8Pts)

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}.$$

1) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 en précisant le domaine de convergence.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{4^n}$$

Solution

Exercice 1(6 Pts)

Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}, \qquad \text{pour} \quad n \geq 3.$$

1. Nous remarquons que $\frac{1}{(n-1)(n-2)} \sim \frac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente, ainsi la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}$ est convergente, par le critère de comparaison.

2. Posons $\frac{1}{(n-1)(n-2)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n-2}$, nous remarquons que $a = -1$ et $b = 1$.

3. $u_3 + u_4 + u_5 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, ainsi

$$u_3 + u_4 + \ldots + u_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}) = 1 - \frac{1}{n-1}.$$

4. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n-1}) = 1$, alors

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} = 1.$$

Exercice 2(6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n!}$$

1. Le rayon de convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{2n+2}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n x^{2n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2x^2}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Ainsi $R = +\infty$.

2. On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$, ainsi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x^2)^n}{n!} = e^{2x^2}.$$

3. On remplace $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

<u>Exercice 3</u>(8Pts)

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}.$$

1) Le développement en série entière de f est

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2} = \frac{x^2}{4} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Le rayon de convergence est $R = 2$ et le domaine de convergence est $] - 2, 2[$.

2) $f'(x) = \left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)' = \frac{8x)}{(4-x^2)^2}$ et en d'autre part

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{4^{n+1}}.$$

Si on remplace $x = 1$, on a

$$f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+2}{4^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{4^{n+1}} = \frac{8}{9}.$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{4^n} = \frac{16}{9}.$$

6.12 Examen 2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2013-2014

Examen.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes :

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^n+2}{3e^{n+1}+1}\right)^n$ • $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$ • $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$

Exercice 2(8 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}.$$

1) Calculer le rayon de convergence R.

2) Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$ et en déduire le domaine de convergence.

3) Calculer la somme de $f(x)$ pour $x > 0$ et $x < 0$.

4) En déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

Exercice 3(6 Pts)

On considère l'équation différentielle suivante.

$$(E) \begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

On note $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, une série entière dont le rayon de convergence R est strictement positif.

1) Calculer les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4.

2) Calculer les coefficients $a_n, n \geq 5$.

3) En déduire la solution de l'équation différentielle (E).

Solution

Exercice 1(6 Pts)

1) Nous appliquons le critère de Cauchy, nous avons

$$\lim_{n+\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{e^n+2}{3e^{n+1}+1}\right)^n} = \lim_{n+\to\infty} \left(\frac{e^n+2}{3e^{n+1}+1}\right) = \lim_{n+\to\infty} \frac{e^n(1+\frac{2}{e^n})}{e^n(3e+\frac{1}{e^n})}$$

$$= \frac{1}{3e} < 1,$$

ainsi, la série CONVERGE.

2) Nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

On sait que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge et d'après le critère de Leibniz, la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{converge.}$$

Ainsi, la série DIVERGE.

3) Nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}.$$

Nous appliquons le critère de Leibniz. On a

$$\bullet \text{le terme} \quad \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} \quad \text{est décroissant}$$

$$\bullet \lim_{n+\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = 0.$$

Ainsi, la série CONVERGE.

Exercice 2(8 Pts)

1) Le rayon de convergence est donné par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n+\to\infty} \frac{1}{2n+1}.\frac{2n-1}{1} = 1.$$

Ainsi, $R = 1$

2) Pour $x = 1$, on a la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \quad \text{qui diverge}$$

car

$$\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n}.$$

Pour $x = -1$, on a la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{qui converge}$$

par le critère de Leibniz. Ainsi, le domaine de convergence est

$$D = [-1, 1[.$$

3) La somme. Pour $x > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n-1}$$

$$= \sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{2n-1}$$

Posons $2n - 1 = 2m + 1$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sqrt{x} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2m+1}}{2m+1}.$$

D'autre part, on a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} y^{2m} = \frac{1}{1-y^2},$$

ceci implique que

$$\int \sum_{m=0}^{+\infty} y^{2m} dy = \int \frac{1}{1-y^2} dy$$

$$\int \sum_{m=0}^{+\infty} y^{2m} dy = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \right] dy$$

Ainsi, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^{2m+1}}{2m+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$$

Ce qui donne que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sqrt{x}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2m+1}}{2m+1} = \frac{\sqrt{x}}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Pour $x < 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{2n-1}$$

$$\sqrt{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n-1}}{2n-1}$$

Posons $2n-1 = 2m+1$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sqrt{-x}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}(\sqrt{-x})^{2m+1}}{2m+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = -\sqrt{-x}\arctan(\sqrt{-x}).$$

4) Nous remplaçons dans la somme par $x = -1$, nous avons alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

<u>Exercice 3</u>(6 Pts)

Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

1) Nous remplaçons les trois termes dans (E), nous obtenons

$$(E) \Leftrightarrow x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+n}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_{n-1})x^n + 2a_1 = 0$$

Ainsi, nous avons

$$(n(n+1)a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}) = 0, \quad \text{et } a_1 = 0$$

ce qui donne

$$a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}....(*) \qquad \text{et} \quad a_1 = 0.$$

D'après la condition $y(0) = 1$, nous concluons que $a_0 = 1$ et d'après la relation $(*)$, on a

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{2.3}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2.3.4.5}$$

2) Nous remarquons que les coefficients impairs sont nuls. Pour les coefficients pairs, on a

$$a_6 = \frac{-1}{2.3.4.5.6.7}, ...$$

Ainsi,

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$$

3) Nous concluons que

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p} = \frac{1}{x}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

$$= \frac{\sin(x)}{x}$$

6.13 Examen de rattrapage 2014

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen **Niveau : ST/L2/S1**
Département des Sciences et techniques **UEF3/Math3**
2012-2013

Examen rattrapage.

Exercice 1(6 Pts)

Pour $n \geq 1$, on pose,

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

1) Calculer U_1, U_2, U_3, U_{n-1}.
2) Calculer $S_n = U_1 + U_2 + ... + U_n$.
3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est convergente et indiquer sa somme.

Exercice 2(7 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n.$$

1) Calculer le rayon de convergence R, et en déduire le domaine de convergence.
2) Calculer la somme de la série entière f.
3) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

Exercice 3(7 Pts)

Soit la fonction suivante

$$f(x) = \frac{1}{4+x^2}.$$

1) Développer la fonction $g(x) = \frac{1}{4+x}$ en série entière au voisinage de 0.
2) Développer la fonction $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ en série entière au voisinage de 0 en précisant le rayon de convergence.
3) En déduire le développement de la fonction $h(x) = \arctan(\frac{x}{2})$.

S o l u t i o n

Exercice 1(6 Pts)

1) Nous remarquons que

$$U_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

et $U_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$

2) On sait que

$$S_n = U_1 + U_2 + .. + U_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + ... \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

3) Puisque

$$\lim_{n+\to\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ converge et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \lim_{n+\to\infty} S_n = 1$$

Exercice 2(7 Pts)

1) Le rayon de convergence R est donné par :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{(-2)^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Ainsi, $R = +\infty$.
Le domaine de convergence est $\mathbb{R}$.

2) On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = e^{-2x}$$

car nous savons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$.

3) Si on pose $x = \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Exercice 3(7 Pts)

1) Le développement de la fonction g est

$$\frac{1}{4+x} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1+\frac{x}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x}{4})^n$$

2) Le développement de la fonction f est

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x^2}{4})^n$$

Le rayon de convergence $R = 2$ car pour que la série converge il faut que $\frac{x^2}{4} < 1$ et ceci implique que $|x| < 2$.

3) On sait que

$$(\arctan(\frac{x}{2}))' = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{x^2}{4})^n$$

On intègre des deux cotés, on a

$$\arctan(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

6.14 Examen GBM 2012

Université Abou-Bakr-Belkaid de Tlemcen
Département des Sciences et techniques
2011-2012

Niveau : GBM/L2/S1
UEF3/Math3

Examen final.

Exercice 1(6 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{3n}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Exercice 2(10 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n2^n}$$

1) Calculer le rayon de convergence R.

2) Préciser la nature de la série aux points $x = +R$ et $x = -R$ et en déduire le domaine de convergence.

3) Calculer la somme de $f'(x)$.

4) En déduire la somme de la série entière $f(x)$.

5) En déduire la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n2^n}$

Exercice 3(4Pts)

Soit la fonction suivante

$$f(x) = \frac{3x}{(1-x)(1+x)}$$

Développer la fonction f en série entière au voisinage de 0.

S o l u t i o n

Exercice 1(6 Pts)

• $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{3n}$

Nous appliquons la règle de Cauchy, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{3n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}<1.$$

Ainsi la série converge.

• $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$.

Nous appliquons le critère de Leibniz, nous avons :

$\frac{1}{n+1}$ est décroissant et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Ainsi la série converge.

Exercice 2(10 Pts)

Soit la série entière

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n2^n}$$

1. Le rayon de convergence

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{2(n+1)2^{n+1}}\frac{2n2^n}{x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{2}.$$

Si $\frac{x^2}{2}<1 \iff x^2<2 \iff |x|<\sqrt{2}$ alors la série converge absolument.
Si $\frac{x^2}{2}>1 \iff |x|>\sqrt{2}$ alors la série diverge.
Ceci implique que $R=\sqrt{2}$.

2. Si $|x|=\sqrt{2}$ alors

• $x=\sqrt{2}$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^{2n}}{2n2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ qui diverge.

• $x=-\sqrt{2}$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\sqrt{2})^{2n}}{2n2^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ qui diverge.

Le domaine de convergence est $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

3. La somme de la série entière est

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n}=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right),\quad \forall x\in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[.$$

4. Pour $x=1$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n2^n}=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln(2).$$

Exercice 3(4Pts)

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{3x}{(1-x)(1+x)} = \frac{3x}{1-x^2} = 3x\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}.$$

Chapitre 7

Annexe historique

Dans cette annexe, nous résumons la biographie des mathématiciens cités dans le livre.

Bernard Bolzano (1781-1848).
Mathématicien, philosophe et théologien Autrichien. L'influence de ses ouvrages philosophiques est importante tout comme ses découvertes en mathématiques. Il est connu aussi d'être l'un des premiers à donner une définition rigoureuse d'une limite.

Karl Weirstrass (1815-1897).
Mathématicien allemand. Il est souvent cité comme le père de l'analyse moderne pour ses études sur la fiablité de l'analyse mathématique. Ses travaux les plus importants portent sur les fonctions elliptiques.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857).
Mathématicien Français. Son oeuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au 18 ème siecle. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque.

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783).
Mathématicien, philosophe et encyclopédiste français, il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'en 1757 et pour ces recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivées partielles.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).
Mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
Philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand. C'est Leibniz qui met au point la découverte mathématique fondamentale, l'invention du calcul différentiel et intégral. Leibniz montre notamment que l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre, invente la notation $\int f(x)dx$, trouve les formules de dérivation d'un produit, d'un quotient, d'une puissance.

Niels Henrik Abel (1802-1829).
Mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; et en algèbre, sur la résolution des équations.

Brook Taylor (1685-1731).
Mathématicien et homme de science anglais. Taylor découvre la formule d'intégration par parties, et invente le calcul aux différences finies. Son intérêt pour le problème des cordes vibrantes l'amène à l'étude des équations différentielles du second ordre, et à l'existence de solutions singulières pour ces équations.

Joseph Fourier (1768-1830).
Savant, diplomate et mathématicien Français. Il fait des expériences sur la propagation de la chaleur qui lui permettront de modéliser l'évolution de la température au travers des séries trigonométriques.

Bibliographie

[1] Kada Allab, *Eléments d'analyse : fonction d'une variable réelle* - O.P.U., 2002.

[2] Stéphane Balac, Laurent Chupin, *Analyse et algèbre : cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple*, PPUR presses polytechniques, 2008.

[3] François Liret, Dominique Martinais, *Mathématiques à l'Université - Analyse - 2e année : Cours et exercices avec solutions - Licence 2e année MIAS, MASS et SM*, Dunod, 2004.

[4] Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen, Jacques-Arthur Weil, *Mathématiques L2 : Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*, Pearson, 2007.

[5] Florence Monna, Gilbert Monna, *Suites et séries de fonctions : Exercices corrigés avec rappels de cours*, Cépaduès, 2013.

[6] Nikolaï Piskounov. *Calcul différentiel et intégral*, Tome 1 et 2. Editions Mir, MOSCOU 1980 ou Ed. Ellipses 1993.

[7] Dominique Prochasson, *Analyse 2eme année. Exercices corrigés*, Dunod, 2000.

[8] Murray R. Spiegel, *Analyse : Cours et problèmes - 925 problèmes résolus*, Editions Schaum (édition de 1993)